

Lista de Exercícios: Limite e Continuidade

Funções de Duas Variáveis

Exercício 1 – Limite com caminho oculto (indeterminação não trivial)

Considere a função:

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

- (a) Verifique se o limite de $f(x, y)$ existe quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.
- (b) Caso o limite não exista, exiba dois caminhos que levem a resultados diferentes.

Dica: Experimente os caminhos $y = kx^2$, $y = x$, etc.

Exercício 2 – Limite com interpretação geométrica

Considere a função:

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

- (a) Estude o limite da função quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.
- (b) O limite existe? Justifique.
- (c) O que esse comportamento sugere do ponto de vista físico?

Dica: Use coordenadas polares ou caminhos distintos.

Exercício 3 – Continuidade de função por partes

Considere a função:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) O limite existe em $(0, 0)$? Justifique.
- (b) A função é contínua em $(0, 0)$? Explique.

Sugestão: Experimente os caminhos $y = x$, $y = kx$, etc.

Exercício 4 – Determinação de parâmetro para continuidade

Considere a função:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{ax^2y}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Determine o valor do parâmetro a para que a função seja contínua em $(0, 0)$.
- Justifique com base no limite da função no ponto.

Dica: Use coordenadas polares e iguale o limite ao valor da função no ponto.

Gabarito / Soluções

Exercício 1:

(a) O limite não existe.

(b) Caminhos:

– Pelo caminho $y = x^2$: $f(x, x^2) = \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + x^4} = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$

– Pelo caminho $y = 0$: $f(x, 0) = 0$

Como os limites são diferentes, o limite não existe.

Exercício 2:

(a) Em coordenadas polares: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$

$$f(r, \theta) = \frac{r \cos \theta \cdot r \sin \theta}{r} = r \cos \theta \sin \theta$$

(b) $\lim_{r \rightarrow 0} r \cos \theta \sin \theta = 0$, independentemente de θ . Logo, o limite é 0.

(c) A função representa um campo que se anula na origem, mas cujo valor ao redor depende da direção. Isso pode modelar, por exemplo, o fluxo de calor ou corrente em um ponto sem intensidade.

Exercício 3:

(a) Pelo caminho $y = x$, temos:

$$f(x, x) = \frac{2x^2}{2x^2} = 1 \quad \text{e pelo caminho } y = -x: \quad f(x, -x) = \frac{-2x^2}{2x^2} = -1$$

Como os limites são diferentes, o limite não existe.

(b) Como o limite não existe, a função **não é contínua** em $(0, 0)$.

Exercício 4:

• Em coordenadas polares:

$$f(x, y) = \frac{ar^2 \cos^2 \theta \cdot r \sin \theta}{r^2} = ar \cos^2 \theta \sin \theta$$

• $\lim_{r \rightarrow 0} ar \cos^2 \theta \sin \theta = 0$, para qualquer θ

• Como o limite é 0, basta definir $f(0, 0) = 0$, e a função será contínua para qualquer valor de a

• **Conclusão:** A função será contínua se definirmos $f(0, 0) = 0$. O valor de a pode ser qualquer número real.