

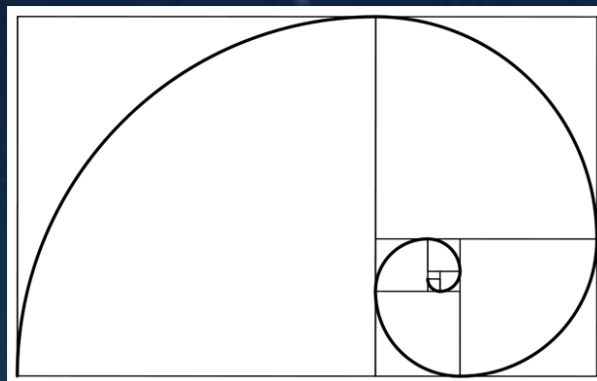
$\Sigma \epsilon m \mathbb{C}$

ϵ - learning

Σ studando ϵm Casa

Prof. Jorge Formiga

Sequência Numérica (limites)#2



Loading...

$\Sigma\epsilon m\mathbb{C}$
 ϵ - learning



Por que Limite de uma sequência?



$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{2n}{3n + 5}$$

O quê é uma sequência numérica?



Uma lista de números escritos em uma ordem definida

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$$



Notação : sequência $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots\}$ é também indicada por

$$\{a_n\} \quad \text{ou} \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots) \rightarrow \text{SI}$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n) \rightarrow \text{SF}$$

Exemplos

$$(a) \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$(b) \left\{ \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n} \right\}$$

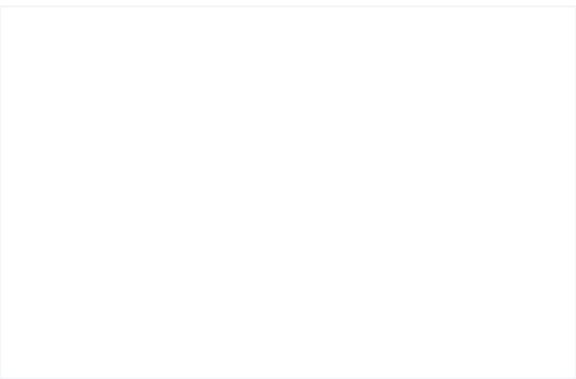
$$a_n = \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$$

$$(c) \left\{ \sqrt{n-3} \right\}_{n=3}^{\infty}$$

$$a_n = \sqrt{n-3}, \quad n \geq 3$$

$$(d) \left\{ \cos \frac{n\pi}{6} \right\}_{n=0}^{\infty}$$

$$a_n = \cos \frac{n\pi}{6}, \quad n \geq 0$$



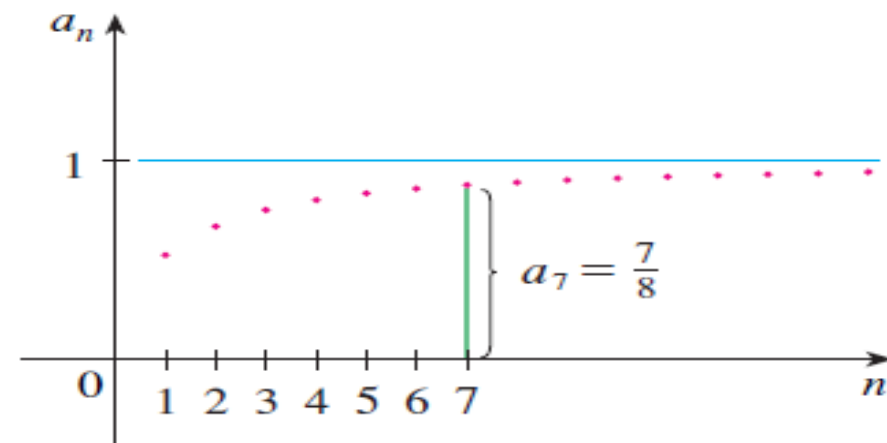
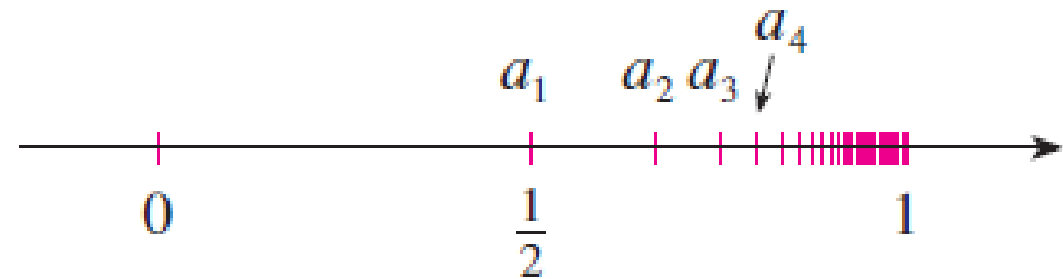


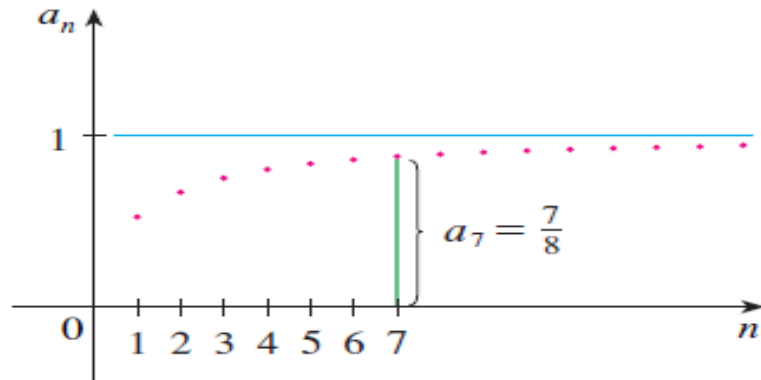
Vejamos a sequência...

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \right\}$$

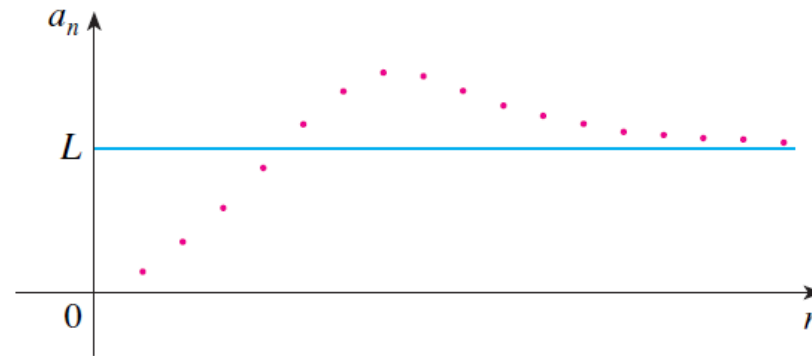
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$





$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Em geral, a notação $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$



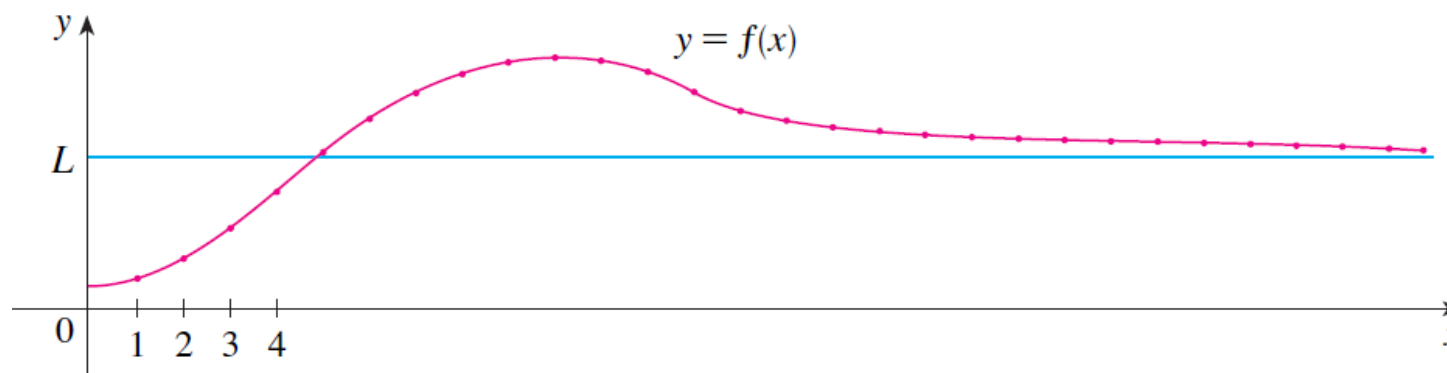
Definição: Uma sequência $\{a_n\}$ tem **limite** L e escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \rightarrow L \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

se pudermos tornar os termos a_n tão próximos de L quanto quisermos ao fazer n suficientemente grande. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existir, dizemos que a sequência **converge** (ou é **convergente**). Caso contrário, dizemos que a sequência **diverge** (ou é **divergente**).



Teorema: Se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ e $f(n) = a_n$ quando n é um inteiro, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.



Em particular, como sabemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} (1/x^r) = 0$ quando $r > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} = 0$$

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, então a sequência $\{a_n\}$ é divergente.

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ forem sequências convergentes e c for uma constante, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

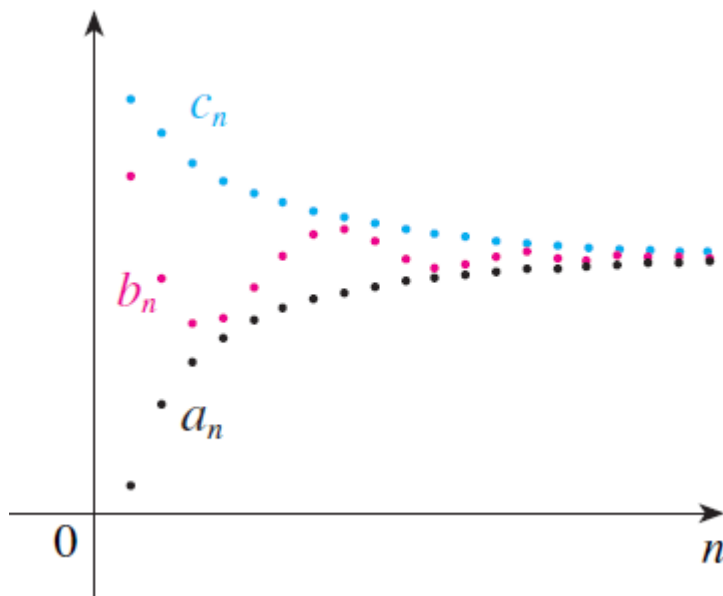
$$\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \quad \text{se } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^p = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right]^p \quad \text{se } p > 0 \text{ e } a_n > 0$$





Teorema do Confronto

Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ para $n \geq n_0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

Exemplo



Exemplo 1: Encontre $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

Exemplo 2: A sequência $a_n = \frac{n}{\sqrt{10+n}}$ é convergente ou divergente?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{10+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{10}{n^2} + \frac{1}{n}}} = \infty$$

Exemplo 3: Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}$.

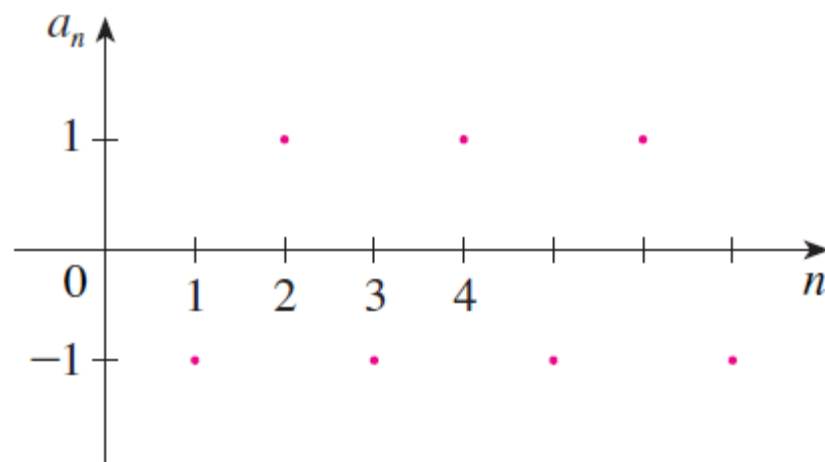


$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

Teorema: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ e $f(n) = a_n$ quando n é um inteiro, então
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

Exemplo 4: Determine se a sequência $a_n = (-1)^n$ é convergente ou divergente.



a sequência $\{(-1)^n\}$ é divergente.

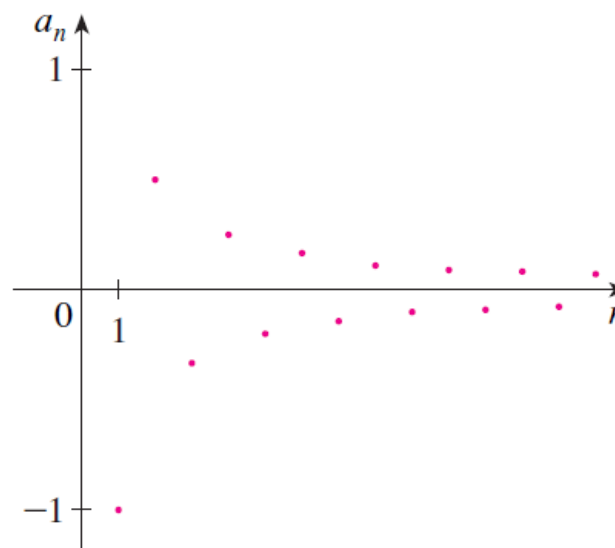
Exemplo 5: Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}$ se ele existir.

Teorema: Se $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Teorema: Se $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$



The End