# Resolução Detalhada dos Exercícios

1. (**Domínio**)

$$f(x,y) = \frac{\ln(x^2+y^2-4)}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$$

   (a) Para que a função esteja bem definida, devemos considerar:

   - O argumento do logaritmo deve ser positivo:

   $$x^2+y^2-4>0 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2>4$$

   - O argumento da raiz deve ser positivo (não pode ser zero pois está no denominador):

   $$9-x^2-y^2>0 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2<9$$

   Assim, o domínio é dado por:

   $$4<x^2+y^2<9$$

   que representa uma região anular (coroa circular) no plano $xy$.

   (b) O gráfico do domínio é uma coroa circular centrada na origem, limitada pelos círculos:

   $$x^2+y^2=4 \quad (raio 2), \quad x^2+y^2=9 \quad (raio 3)$$

   A região entre esses dois círculos representa o domínio da função.

2. (**Análise Topográfica**)

$$f(x,y) = 100-2x^2-y^2$$

   (a) Curvas de nível: seja $f(x,y)=k$, temos:

   $$100-2x^2-y^2=k \quad \Rightarrow \quad 2x^2+y^2=100-k$$

   Essas equações representam **elipses** centradas na origem.
   Para os valores dados:

   - $k=90 \Rightarrow 2x^2+y^2=10$
   - $k=80 \Rightarrow 2x^2+y^2=20$
   - $k=60 \Rightarrow 2x^2+y^2=40$
   - $k=40 \Rightarrow 2x^2+y^2=60$

   (b) As curvas de nível indicam que se trata de uma superfície com formato de uma **colina** (paraboloide invertido), com ponto mais alto em $(0,0)$.

(c) O gradiente da função:

$$\nabla f(x, y) = (-4x, -2y)$$

O terreno é mais íngreme onde o gradiente tem maior módulo, ou seja, quanto mais longe da origem.

3. (**Plotando Superfície**)

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

(a) O gráfico dessa função é um **sela hiperbólica**. A superfície tem concavidade para cima na direção $x$ e para baixo na direção $y$.

(b) Curvas de nível:

$$x^2 - y^2 = c$$

Para diferentes valores de $c$, obtemos hipérboles:

- $c > 0$: ramos abertos no eixo $x$
- $c < 0$: ramos abertos no eixo $y$
- $c = 0$: duas retas, $x = \pm y$

Essas curvas mostram a mudança de concavidade da função.

4. (**Aplicação em Engenharia Ambiental**)

$$C(x, y) = \frac{100}{1 + (x-2)^2 + (y-3)^2}$$

(a) A concentração será máxima quando o denominador for mínimo. Isso ocorre quando:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 0 \Rightarrow (x, y) = (2, 3) \Rightarrow C_{máx} = \frac{100}{1} = 100mg/L$$

(b) Curvas de nível: fixando $C = k$, temos:

$$\frac{100}{1 + (x-2)^2 + (y-3)^2} = k \Rightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = \frac{100}{k} - 1$$

São **circunferências** centradas em $(2, 3)$, com raio decrescente conforme $k$ aumenta.

(c) As curvas mostram regiões onde a concentração é constante. Os valores mais altos estão perto do ponto $(2, 3)$, que representa a **fonte do poluente**. A função modela bem a dispersão em forma de gradientes concêntricos.

(d) No contexto ambiental, as curvas de nível permitem:

- Delimitar áreas de risco;
- Otimizar posicionamento de sensores ou barreiras;
- Planejar ações de contenção e remediação.

Elas são uma ferramenta essencial na modelagem e tomada de decisão ambiental.