



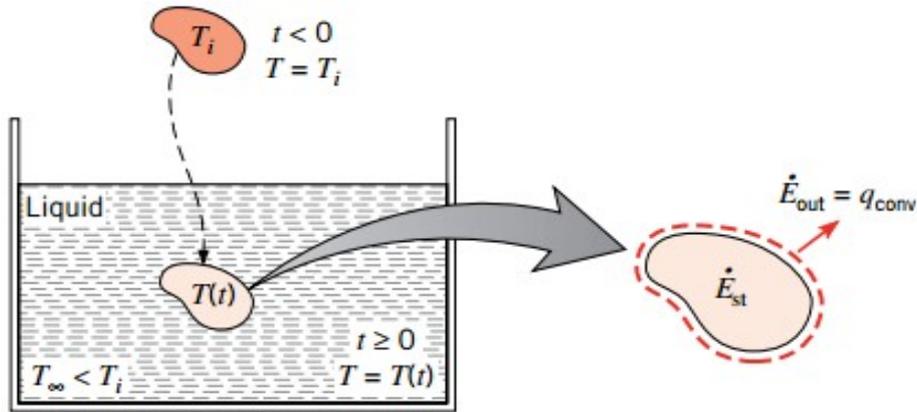
# Condução transiente

*Prof. Alexei Essiptchouk*

**Dep. Engenharia Ambiental  
Instituto de Ciência e Tecnologia  
Universidade Estadual Paulista  
“Júlio de Mesquita Filho”**

# Método da capacitância global

Um corpo a temperatura  $T_i$  está inserido num banho do líquido a  $T_\infty$ . Sólido passa súbita mudança no ambiente térmico.



Balço da energia global no sólido:  
Energia retirada pela convecção = variação da energia acumulada no corpo

$$\dot{E}_{ent} - \dot{E}_{sai} = \dot{E}_{acu}$$

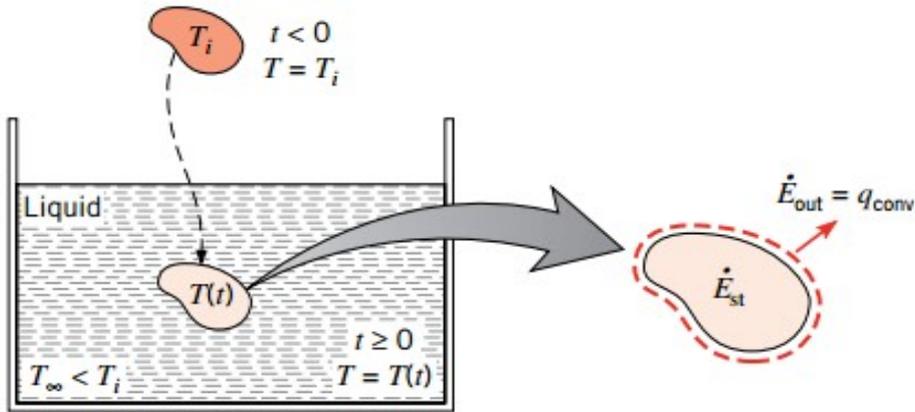
$$-h A_s (T(t) - T_\infty) = \rho V c \frac{dT(t)}{dt}$$

Definindo o excesso de temperatura

$$\theta \equiv T(t) - T_\infty$$

Verificando que  $\frac{d\theta}{dt} = \frac{dT}{dt}$   $\longrightarrow$   $\frac{\rho V c}{h A_s} \frac{d\theta}{dt} = -\theta$

# Método da capacitância global



Separando as variáveis e integrando

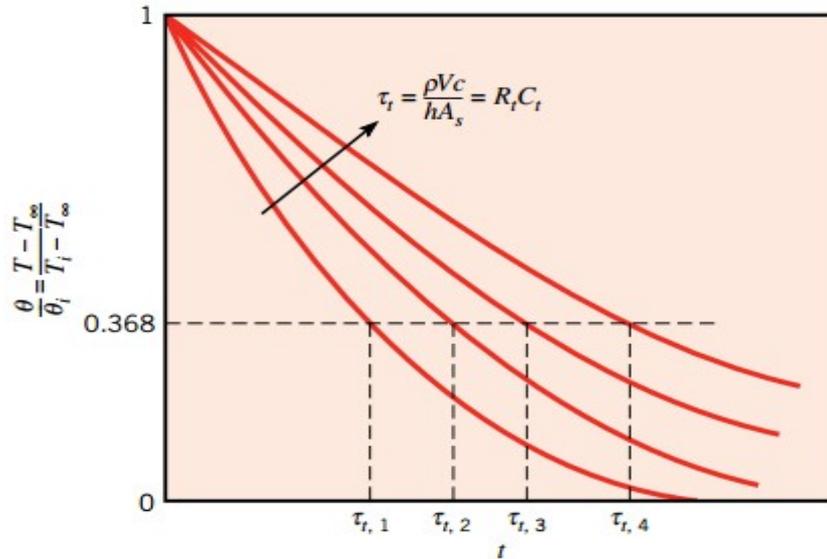
$$\frac{\rho V c}{h A_s} \int_{\theta_i}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = - \int_0^t dt$$

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \exp \left[ - \frac{h A_s}{\rho V c} t \right]$$

$$\theta_i = T_i - T_{\infty}$$

$$\frac{\rho V c}{h A_s} \frac{d\theta}{dt} = -\theta$$

# Método da capacitância global



$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp \left[ - \left( \frac{h A_s}{\rho V c} \right) t \right] = e^{-\frac{t}{\tau_t}}$$

$\tau_t$  – constante de tempo térmica

$$\tau_t = \left( \frac{1}{h A_s} \right) (\rho V c) = R_t C_t$$

$R_t$  – é a resistência a transferência de calor por convecção

$C_t$  – é a capacitância térmica global

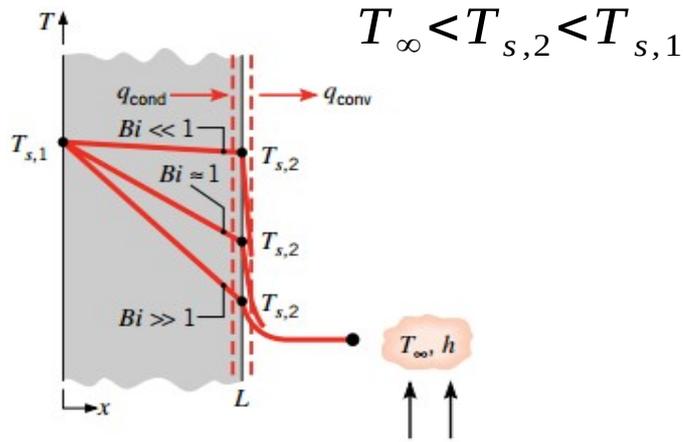
$$1/e = 1 / 2,7181 = 0.368$$

Energia total transferida

$$Q = \int_0^t q dt = h A_s \int_0^t \theta dt$$

$$Q = (\rho V c) \theta_i \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_t}} \right)$$

# Validade do método da capacitância global



Balanco de energia na superfície: energia provida pela condução e retirada pela convecção da superfície

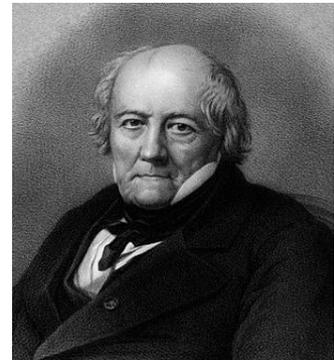
$$q_{cond} = q_{conv}$$

$$\frac{kA}{L}(T_{s,1} - T_{s,2}) = hA(T_{s,2} - T_{\infty})$$

$$\frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{T_{s,2} - T_{\infty}} = \frac{hA}{kA/L} = \frac{L/kA}{1/hA} = \frac{R_{cond}}{R_{conv}} = \frac{hL}{k} \equiv Bi$$

Número adimensional de **Biot** – *fornece uma medida da queda de temperatura no sólido em relação à diferença de temperatura entre a superfície e o fluido.*

Jean-Baptiste Biot  
1774 - 1862

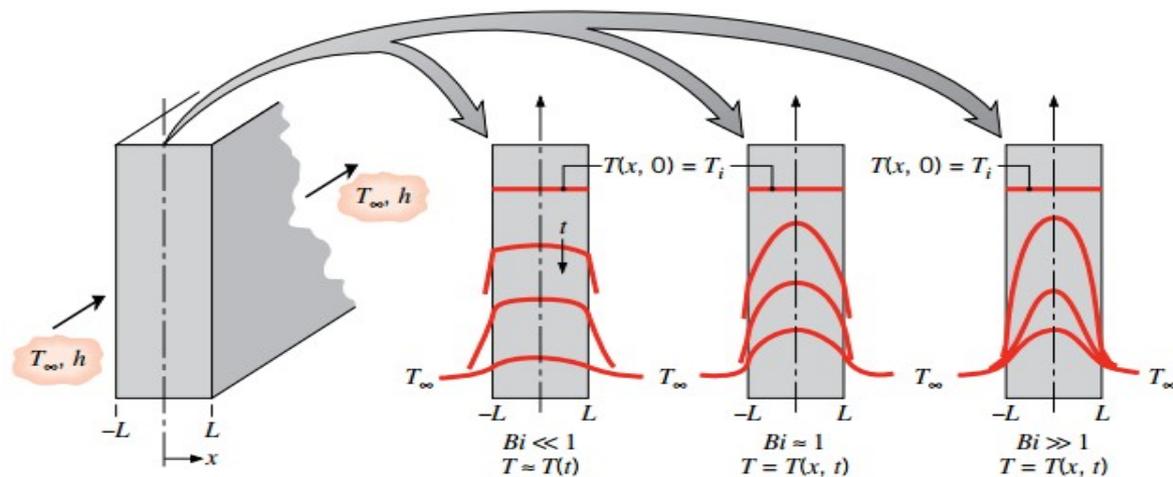


# Validade do método da capacitância global

$$T_{\infty} < T_i$$

Bi  $\ll$  1 – a resistência a condução térmica é bem menor que a resistência à convecção.  
Os gradientes pequenos da temperatura no interior do corpo.

**O erro do método é pequeno quando for satisfeito o critério de validade**



$$Bi = \frac{hL_c}{k} < 0,1$$

$L_c$  – é o comprimento característico:

$L_c = V/A_s$  (volume / área superficial)

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \exp \left[ - \left( \frac{h A_s}{\rho V c} \right) t \right]$$

$$\frac{h A_s t}{\rho V c} = \frac{h t}{\rho L_c c} = \frac{h L_c}{k} \frac{k}{\rho c} \frac{t}{L_c^2} = \frac{h L_c}{k} \frac{\alpha t}{L_c^2} = Bi \cdot Fo$$

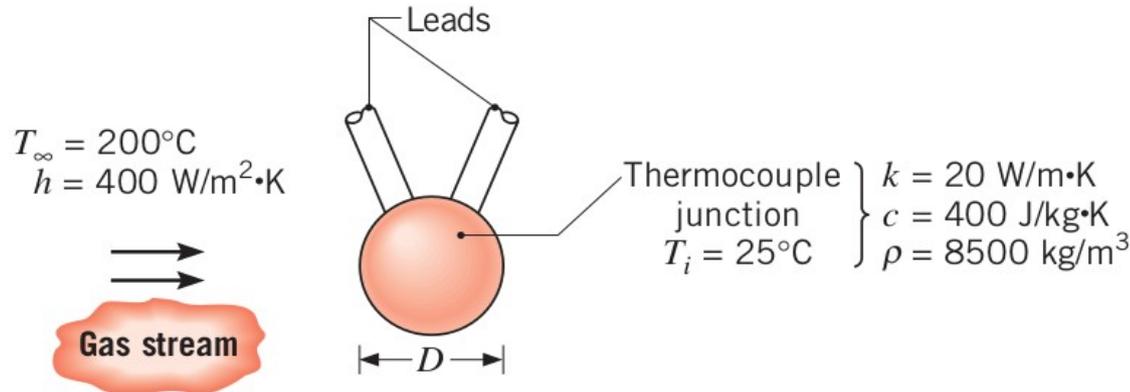
$$\frac{\theta}{\theta_i} = \exp \left[ - (Bi \cdot Fo) \right]$$

O tempo adimensional é o número de Fourier:  $Fo = \frac{\alpha t}{L_c^2}$

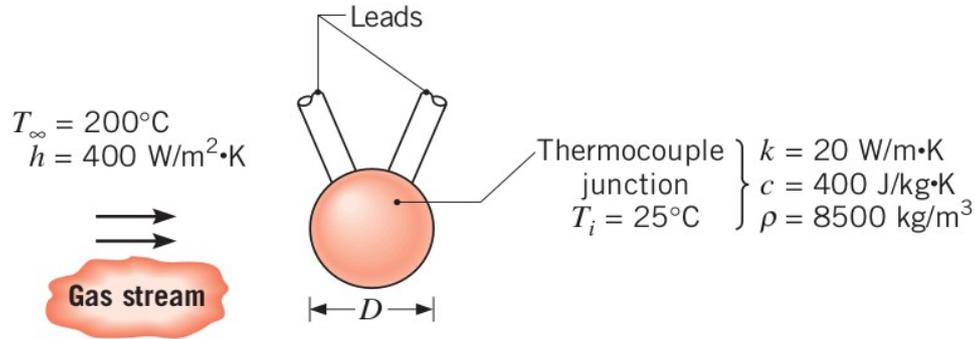
# Problema

Uma junta esférica de termopar usada para medir a temperatura de fluxo de gás. O coeficiente convectivo entre a superfície da junta e o gás é  $h = 400 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ ,  $k = 20 \text{ W}/(\text{m K})$ ,  $c = 400 \text{ J}/(\text{kg K})$  e  $\rho = 8500 \text{ kg}/\text{m}^3$ .

- Determinar o diâmetro que a junta deve ter para que o termopar tenha uma constante de tempo de 1 s.
- Se a junta está a  $25^\circ\text{C}$  e encontra-se posicionada em uma corrente de gás a  $200^\circ\text{C}$ , quanto tempo será necessário para a junta alcançar  $199^\circ\text{C}$ ?



# Problema



Primeiramente achamos o diâmetro e depois verificamos se o critério  $Bi < 0.1$  é satisfeito

$$\tau_t = \left( \frac{1}{h A_s} \right) (\rho V c) = \left( \frac{1}{h \pi D^2} \right) \left( \rho c \frac{\pi D^3}{6} \right) = \frac{\rho c D}{6 h}$$

$$D = \frac{6 h \tau_t}{\rho c} = \frac{6 \times 400 \times 1}{8500 \times 400} = 7.1 \times 10^{-4} \text{ m}$$

Comprimento característico

$$L = \frac{V}{A} = \frac{D}{6} = \frac{r}{3}$$

$$Bi = \frac{hL}{k} = 400 \frac{7.1 \times 10^{-4}}{6 \times 20} = 2.4 \times 10^{-3}$$

$Bi < 0.1 \rightarrow$  condição satisfeita

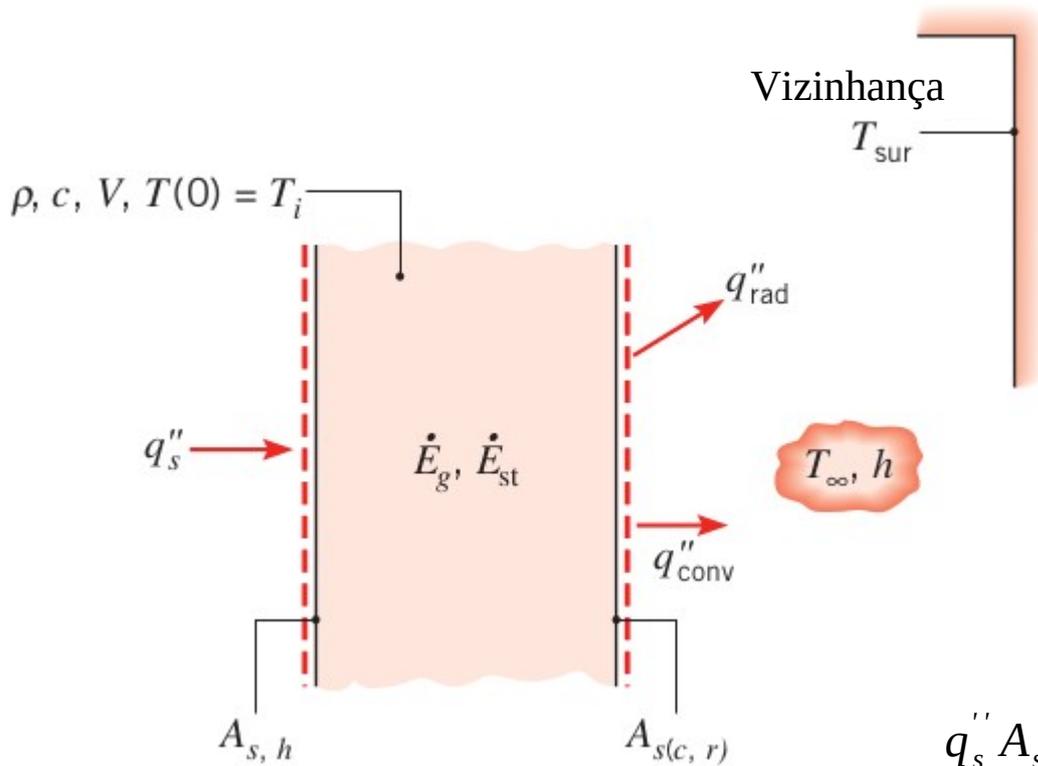
**Tempo para alcançar  $199^{\circ}\text{C}$**

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \exp \left[ - \left( \frac{h A_s}{\rho V c} \right) t \right]$$

$$t = \frac{\rho V c}{h A_s} \ln \left( \frac{T_i - T_{\infty}}{T - T_{\infty}} \right) = \frac{\rho D c}{6 h} \ln \left( \frac{T_i - T_{\infty}}{T - T_{\infty}} \right)$$

$$t = \frac{8500 \times 7.1 \times 10^{-4} \times 400}{6 \times 400} \ln \left( \frac{25 - 200}{199 - 200} \right) = 5.2 \text{ s} \approx 5 \tau_t \frac{8}{40}$$

# Análise geral



Caso geral:

Elemento sólido

Geração de calor

Convecção

Convecção + Radiação

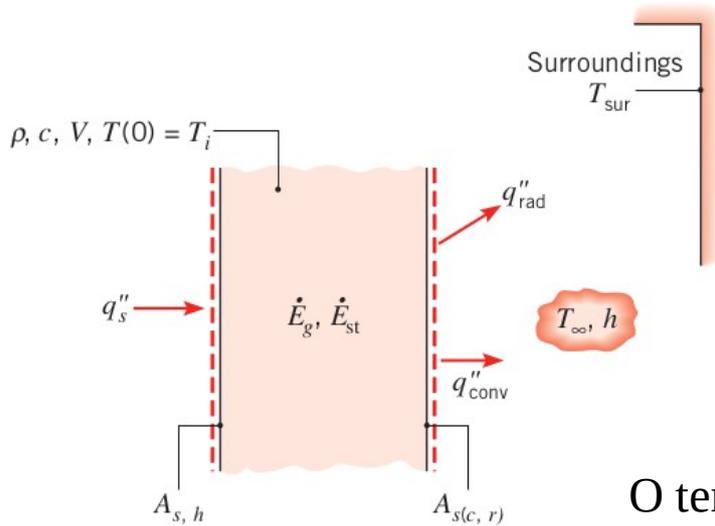
Vizinhança

$$q''_s A_{s,h} + \dot{E}_g - (q''_{conv} + q''_{rad}) A_{s(c,r)} = \rho V c \frac{dT}{dt}$$

$$q''_s A_{s,h} + \dot{E}_g - [h(T - T_\infty) + \varepsilon \sigma (T^4 - T_{viz}^4)] A_{s(c,r)} = \rho V c \frac{dT}{dt}$$

Uma equação diferencial ordinária não linear de primeira ordem, não homogênea e não pode ser resolvida analiticamente.

# Análise geral: caso somente radiação



Valor da convecção é bem **menor** da radiação.

$$-\varepsilon \sigma (T^4 - T_{viz}^4) A_{s(c,r)} = \rho V c \frac{dT}{dt}$$

$$-\frac{\varepsilon \sigma A_{s(c,r)}}{\rho V c} \int_0^t dt = \int_{T_i}^T \frac{dT}{T^4 - T_{viz}^4}$$

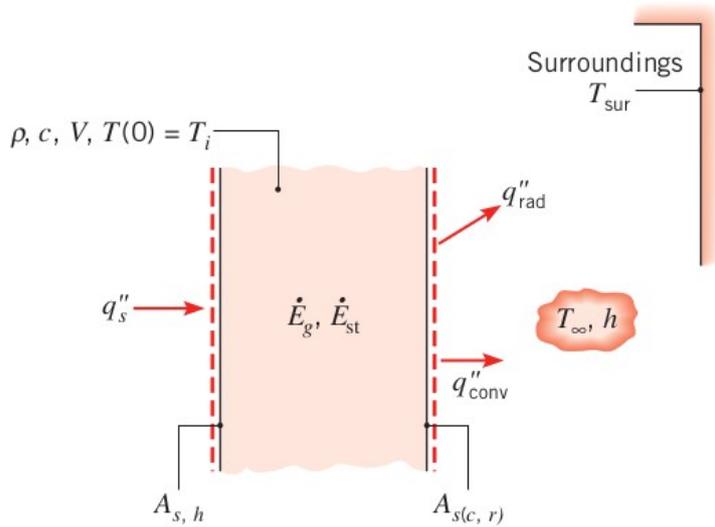
O tempo para alcançar a temperatura  $T$

$$t = -\frac{\rho V c}{4 \varepsilon \sigma A_{s(c,r)} T_{viz}^4} \left( \ln \left| \frac{T_{viz} + T}{T_{viz} - T} \right| - \ln \left| \frac{T_{viz} + T_i}{T_{viz} - T_i} \right| + 2 \left[ \tan^{-1} \left( \frac{T}{T_{viz}} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{T_i}{T_{viz}} \right) \right] \right)$$

Caso  $T_{viz} = 0$  (radiação para o espaço infinito)

$$t = -\frac{\rho V c}{3 \varepsilon \sigma A_{s(c,r)}} \left( \frac{1}{T^3} - \frac{1}{T_i^3} \right)$$

# Análise geral: caso radiação desprezível



Valor da convecção é bem **maior** da radiação.

$$\rho V c \frac{dT}{dt} = q_s'' A_{s,h} + \dot{E}_g - h(T - T_\infty) A_{s(c,r)}$$

Introduzindo  $\theta \equiv T - T_\infty$

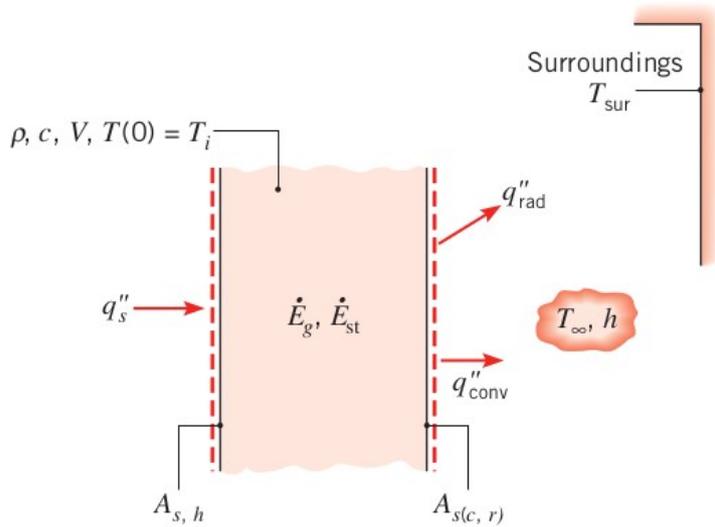
$$\frac{d\theta}{dt} + a\theta - b = 0 \quad a = \frac{h A_{s,c}}{\rho V c} \quad b = \frac{q_s'' A_{s,h} + \dot{E}_g}{\rho V c}$$

Eliminamos não homogeneidade fazendo a transformação

$$\theta' \equiv \theta - \frac{b}{a}$$

$$\frac{d\theta'}{dt} + a\theta' = 0$$

# Análise geral: caso radiação desprezível



Separando as variáveis

$$\frac{d\theta'}{\theta'} = -a dt$$

$$\frac{T - T_\infty - \frac{b}{a}}{T_i - T_\infty - \frac{b}{a}} = \exp(-at)$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp(-at) + \frac{b/a}{T_i - T_\infty} (1 - \exp(-at))$$

Para  $t \rightarrow \infty$

$$T - T_\infty = \frac{b}{a}$$

# Efeitos espaciais: Numero do Biot grande

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

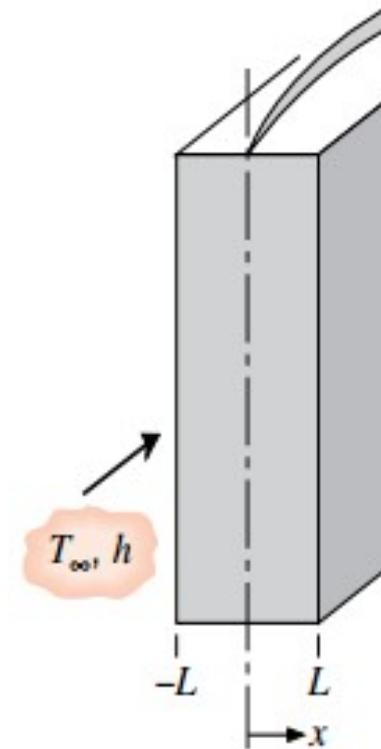
CC

$$T(x,0) = T_i$$

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

$$-k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = h(T(L,t) - T_\infty)$$

$$T = T(x, t, T_i, T_\infty, L, k, \alpha, h)$$



# Efeitos espaciais: Numero do Biot grande

Adimensionalização: agrupamento em grupos apropriados

$\theta \equiv T - T_\infty$  Excesso da temperatura

$\theta_i \equiv T_i - T_\infty$  A diferença máxima

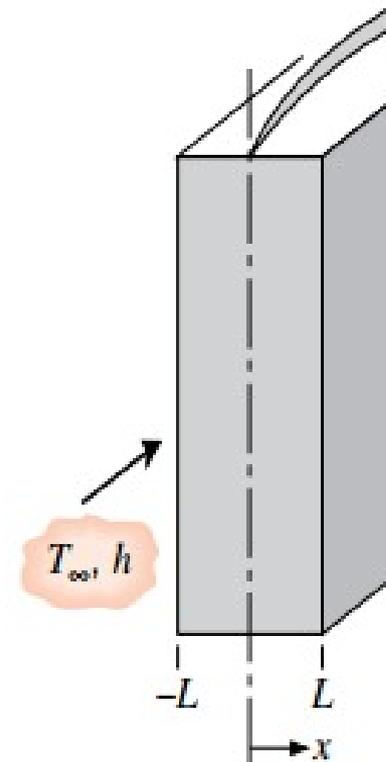
$$\theta^* \equiv \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} \quad 0 \leq \theta^* \leq 1$$

Coordenada espacial adimensional

$$x^* \equiv \frac{x}{L}$$

Tempo adimensional

$$t^* \equiv \frac{\alpha t}{L^2} = Fo$$



# Efeitos espaciais: Numero do Biot grande

Equação de calor em variáveis adimensionais

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

CC

$$T(x,0) = T_i$$

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

$$-k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = h(T(L,t) - T_\infty)$$

$$T = T(x, t, T_i, T_\infty, L, k, \alpha, h)$$

$$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}} = \frac{\partial \theta^*}{\partial Fo}$$

CC

$$\theta^*(x^*, 0) = 1$$

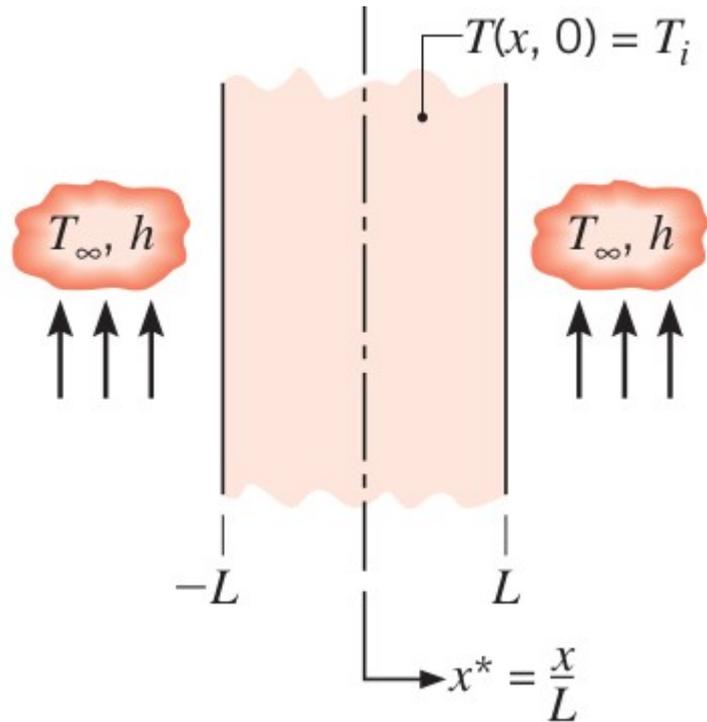
$$\left. \frac{d\theta^*}{dx^*} \right|_{x^*=0} = 0$$

$$\left. \frac{d\theta^*}{dx^*} \right|_{x^*=1} = -Bi \theta^*(1, Fo) \quad Bi \equiv \frac{hL}{k}$$

Para uma dada geometria a distribuição transiente da temperatura é uma função de coordenada adimensional e números Fo e Bi

$$\theta^* = f(x^*, Fo, Bi)$$

# Parede plana com convecção



Aplica-se para o caso de espessura pequena enquanto a altura e largura são grandes

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\zeta_n^2 Fo) \cos(\zeta_n x^*)$$

$$C_n = \frac{4 \sin \zeta_n}{2 \zeta_n + \sin(2 \zeta_n)}$$

$$\zeta_n \text{ são autovalores} \quad \zeta_n \tan \zeta_n = Bi$$

No caso  $Fo > 0.2$  a equação pode ser *aproximada* pelo primeiro termo da série,  $n = 1$ .

$$\theta^* = \theta_0^* \cos(\zeta_1 x^*)$$

$$\theta_0^* = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo) \quad \text{- Temperatura no plano central } x=0$$

Temperatura em qualquer posição varia igualmente a temperatura no plano central

$Bi^*$	Plane Wall		Innite Cylinder		Sphere	
	$\zeta_1$ (rad)	$C_1$	$\zeta_1$ (rad)	$C_1$	$\zeta_1$ (rad)	$C_1$
0.01	0.0998	1.0017	0.1412	1.0025	0.1730	1.0030
0.02	0.1410	1.0033	0.1995	1.0050	0.2445	1.0060
0.03	0.1723	1.0049	0.2440	1.0075	0.2991	1.0090
0.04	0.1987	1.0066	0.2814	1.0099	0.3450	1.0120
0.05	0.2218	1.0082	0.3143	1.0124	0.3854	1.0149
0.06	0.2425	1.0098	0.3438	1.0148	0.4217	1.0179
0.07	0.2615	1.0114	0.3709	1.0173	0.4551	1.0209
0.08	0.2791	1.0130	0.3960	1.0197	0.4860	1.0239
0.09	0.2956	1.0145	0.4195	1.0222	0.5150	1.0268
0.10	0.3111	1.0161	0.4417	1.0246	0.5423	1.0298
0.15	0.3779	1.0237	0.5376	1.0365	0.6609	1.0445
0.20	0.4328	1.0311	0.6170	1.0483	0.7593	1.0592
0.25	0.4801	1.0382	0.6856	1.0598	0.8447	1.0737
0.30	0.5218	1.0450	0.7465	1.0712	0.9208	1.0880
0.4	0.5932	1.0580	0.8516	1.0932	1.0528	1.1164
0.5	0.6533	1.0701	0.9408	1.1143	1.1656	1.1441
0.6	0.7051	1.0814	1.0184	1.1345	1.2644	1.1713
0.7	0.7506	1.0919	1.0873	1.1539	1.3525	1.1978
0.8	0.7910	1.1016	1.1490	1.1724	1.4320	1.2236
0.9	0.8274	1.1107	1.2048	1.1902	1.5044	1.2488
1.0	0.8603	1.1191	1.2558	1.2071	1.5708	1.2732
2.0	1.0769	1.1785	1.5994	1.3384	2.0288	1.4793
3.0	1.1925	1.2102	1.7887	1.4191	2.2889	1.6227
4.0	1.2646	1.2287	1.9081	1.4698	2.4556	1.7202
5.0	1.3138	1.2402	1.9898	1.5029	2.5704	1.7870
6.0	1.3496	1.2479	2.0490	1.5253	2.6537	1.8338
7.0	1.3766	1.2532	2.0937	1.5411	2.7165	1.8673
8.0	1.3978	1.2570	2.1286	1.5526	2.7654	1.8920
9.0	1.4149	1.2598	2.1566	1.5611	2.8044	1.9106
10.0	1.4289	1.2620	2.1795	1.5677	2.8363	1.9249
20.0	1.4961	1.2699	2.2881	1.5919	2.9857	1.9781
30.0	1.5202	1.2717	2.3261	1.5973	3.0372	1.9898
40.0	1.5325	1.2723	2.3455	1.5993	3.0632	1.9942
50.0	1.5400	1.2727	2.3572	1.6002	3.0788	1.9962
100.0	1.5552	1.2731	2.3809	1.6015	3.1102	1.9990
$\infty$	1.5708	1.2733	2.4050	1.6018	3.1415	2.0000

# Parede plana com convecção: Transferência total de energia

$$\dot{E}_{ent} - \dot{E}_{sai} = \Delta \dot{E}_{acu} \quad \text{Assumindo:} \quad \dot{E}_{ent} = 0 \quad \dot{E}_{sai} = Q$$

$$Q = -\Delta \dot{E}_{acu} = -[E(t) - E(0)] \quad Q = -\int \rho c (T(x,t) - T_i) dV$$

Energia interna inicial  $Q_0 = \rho c V (T_i - T_\infty)$

$$\frac{Q}{Q_0} = \int -\frac{T(x,t) - T_i}{T_i - T_\infty} \frac{dV}{V} = \frac{1}{V} \int (1 - \theta^*) dV$$

Utilizando a forma aproximada,  $\theta^* = \theta_0^* \cos(\zeta_1 x^*)$ , a integração resulta em

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{\sin \zeta_1}{\zeta_1} \theta_0^*$$

# Soluções aproximadas para cilindro e esfera

Para casos  $Fo > 0.2$

Cilindro

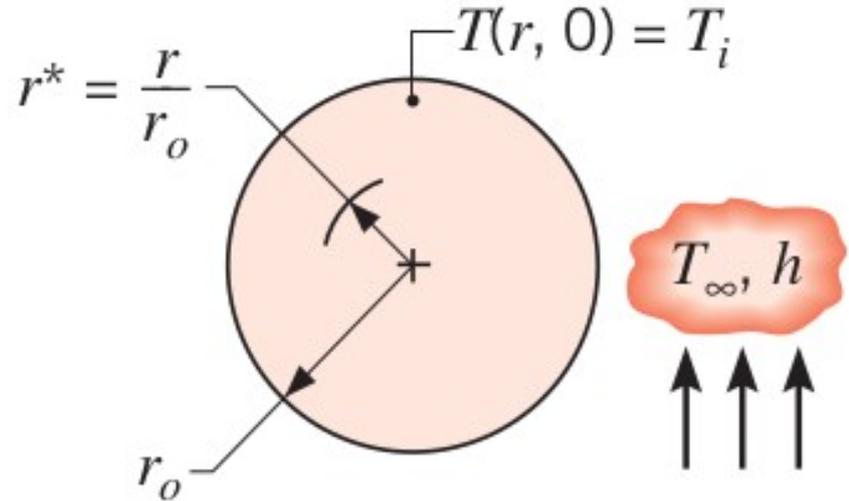
$$\theta^* = \theta_0^* J_0(\xi_1 r^*)$$

$$\theta_0^* = C_1 \exp(-\xi_1^2 Fo)$$

Esfera

$$\theta^* = \theta_0^* \frac{1}{\xi_1 r^*} \sin(\xi_1 r^*)$$

$$\theta_0^* = C_1 \exp(-\xi_1^2 Fo)$$



# Exemplo

Considere um oleoduto de aço (AISI 1010) com 1 m de diâmetro e espessura de parede de 40 mm. O oleoduto é muito bem isolado pelo seu lado externo e, antes do início do escoamento do fluido, suas paredes estão a uma temperatura uniforme de  $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Com o início do escoamento, óleo quente a  $60\text{ }^{\circ}\text{C}$  é bombeado através do oleoduto, gerando na superfície interna do duto condições convectivas correspondente a um  $h = 500\text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ .

1. Quais são os valores dos números de Biot e Fourier apropriados 8 min após o início do escoamento?
2. Em  $t = 8\text{ min}$ , qual é a temperatura da superfície externa do duto coberta pelo isolamento?
3. Qual é o fluxo térmico  $q''$  ( $\text{W/m}^2$ ) do óleo para o duto em  $t = 8\text{ min}$ ?
4. Qual é a quantidade total de energia, por metro linear do duto, que foi transferida do óleo para o duto em  $t = 8\text{ min}$ ?

# Exemplo

Propriedades da Tabela A.1, AISI 1010 para  $T = (-20+60)/2 = 293 \text{ K} \approx 300\text{K}$ :

$$\rho = 7832 \text{ kg/m}^3$$

$$c = 434 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$$

$$k = 63.9 \text{ W/m}\cdot\text{K}$$

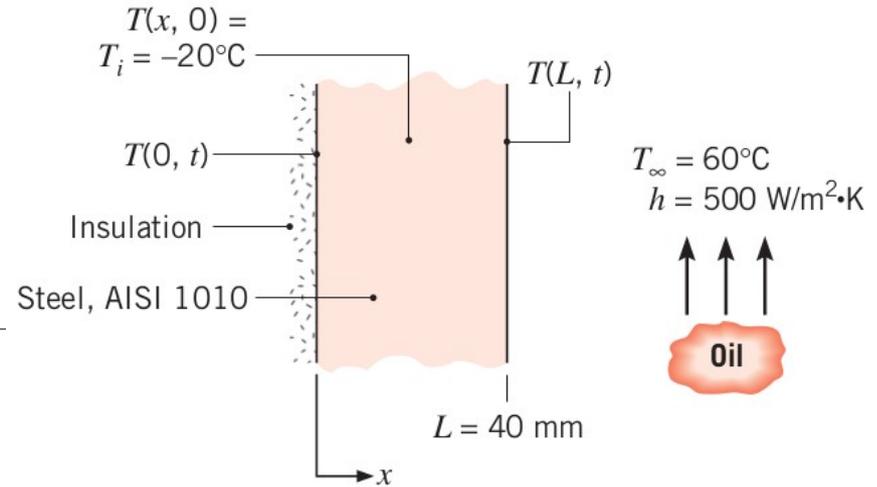
$$\alpha = 18.8 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

Composition	Melting Point (K)	Properties at Various Temperatures (K)													
		Properties at 300 K				$k \text{ (W/m}\cdot\text{K)}/c_p \text{ (J/kg}\cdot\text{K)}$									
		$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$c_p$ (J/kg·K)	$k$ (W/m·K)	$\alpha \cdot 10^6$ (m <sup>2</sup> /s)	100	200	400	600	800	1000	1200	1500	2000	2500
AISI 1010		7832	434	63.9	18.8			58.7	48.8	39.2	31.3				

# Exemplo

$$Bi = \frac{hL}{k} = \frac{500 \times 0,04}{63.9} = 0.313$$

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{18.8 \times 10^{-6} \times 8 \times 60}{0.04^2} = 5.64$$



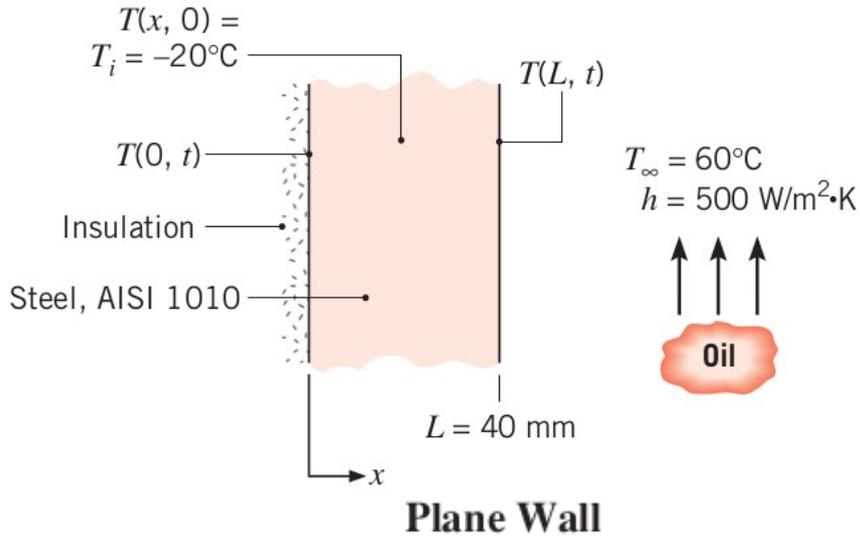
$Bi > 0.1$  o método da capacitância global é inapropriado

$Fo > 0.2$ , O diâmetro  $D$  é bem maior da espessura  $\delta$  e a parede externa com isolamento

→ aproximação de parede plana

→ aproximação pelo primeiro termo

# Exemplo



$$\theta_0^* = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo)$$

➔ Para  $Bi = 0.313$     $C_1 = 1.047$     $\zeta_1 = 0.531$

$$\theta_0^* = 1.047 \exp(-0.531^2 \times 5.64) = 0.214$$

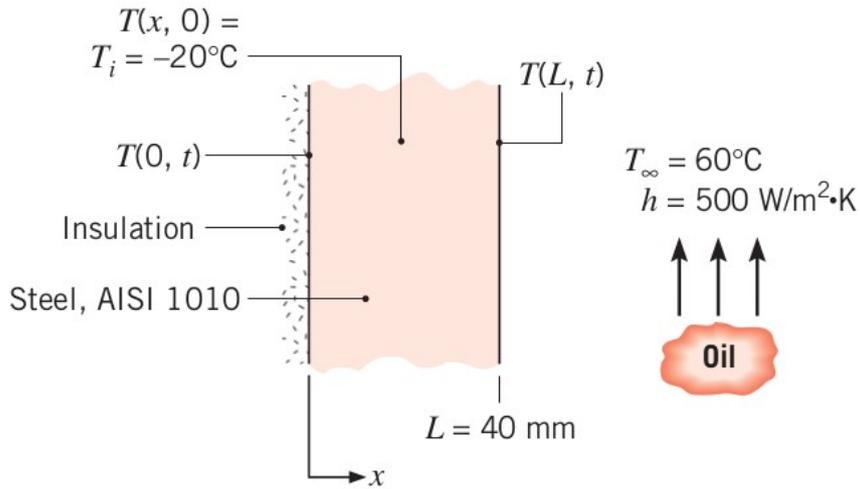
Temperatura na superfície externa (isolada)

$$T_0(8 \text{ min}) = T_\infty + \theta_0^*(T_i - T_\infty)$$

$$T_0(8 \text{ min}) = 60 + 0.214(-20 - 60) = 42.9 \text{ C}$$

$Bi^a$	$\zeta_1$ (rad)	$C_1$
0.30	0.5218	1.0450
0.4	0.5932	1.0580

# Exemplo



O fluxo térmico  $q''$  ( $\text{W/m}^2$ ) do óleo para o duto em instante  $t = 8 \text{ min}$ ?

$$q''_x(L, t) \equiv q''_L = h(T(L, t) - T_\infty)$$

Usamos a solução para temperatura na superfície interna ( $x^* = 1$ ) do duto

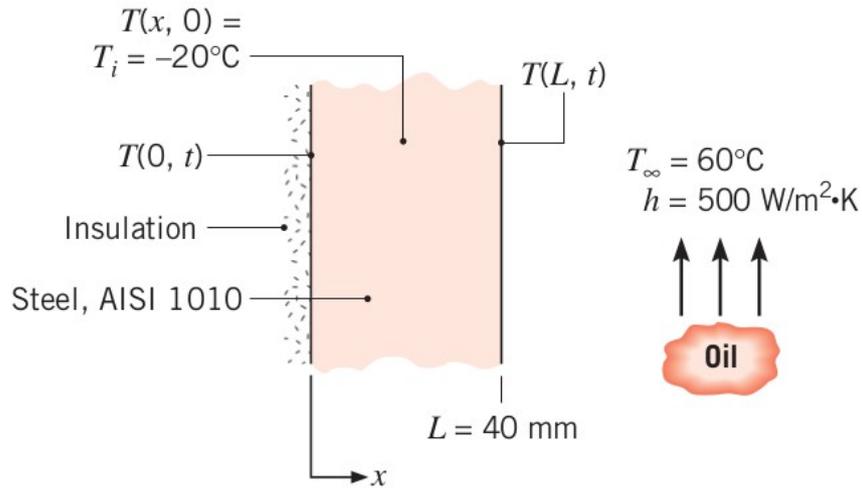
$$\theta^* = \theta_0^* \cos(\zeta_1 x^*) = \theta_0^* \cos(\zeta_1)$$

$$T(L, t) = T_\infty + (T_i - T_\infty) \theta_0^* \cos(\zeta_1)$$

$$T(L, 480) = 60 + (-20 - 60) 0.214 \cos(0.531) = 45.2 \text{ C}$$

$$q''_L = 500(45.2 - 60) = -7400 \text{ W/m}^2$$

# Exemplo



A quantidade total de energia, por metro linear do duto, que foi transferida do óleo para o duto em  $t = 8 \text{ min}$ ?

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{\sin \xi_1}{\xi_1} \theta_0^* = 1 - \frac{\sin 0.531}{0.531} 0.214 = 0.8$$

$$Q' = 0.8 \rho c V (T_i - T_\infty) = 0.8 \rho c \pi D L (T_i - T_\infty)$$

$$Q' = 0.8 \times 7832 \times 434 \times \pi \times 1 \times 0.04 (-20 - 60)$$

$$Q' = -1.37 \times 10^7 \text{ J/m}$$

# O sólido semi-infinito

Números de Fourier pequenos  $< 0.2$

A *variável similar*,  $\eta$ , é aquela que envolve duas variáveis independentes ( $x$ ,  $t$ ) e permite transformar EDP em EDO em termos de uma variável similar

$$\eta \equiv \frac{x}{\sqrt{4 \alpha t}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4 \alpha t}} \frac{dT}{d\eta}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d}{d\eta} \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right] \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{4 \alpha t} \frac{d^2 T}{d\eta^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{x}{2t \sqrt{4 \alpha t}} \frac{dT}{d\eta} = -\frac{\eta}{2t} \frac{dT}{d\eta}$$

$$\frac{d^2 T}{d\eta^2} = -2\eta \frac{dT}{d\eta}$$

$$T(\eta=0) = T_s$$

$$T(\eta \rightarrow \infty) = T_i$$

$$\frac{d(dT/d\eta)}{(dT/d\eta)} = -2\eta d\eta$$

# O sólido semi-infinito: temperatura

$$\frac{d(dT/d\eta)}{(dT/d\eta)} = -2\eta d\eta$$

$$\ln(dT/d\eta) = -\eta^2 + C'_1$$

$$\frac{dT}{d\eta} = C_1 \exp(-\eta^2)$$

$$T = C_1 \int_0^\eta \exp(-u^2) du + C_2$$

$$T(\eta=0) = T_s \quad \longrightarrow \quad C_2 = T_s$$

$$T = C_1 \int_0^\eta \exp(-u^2) du + T_s$$

$$T(\eta \rightarrow \infty) = T_i \quad T_i = C_1 \int_0^\infty \exp(-u^2) du + T_s$$

$$T_i = C_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} + T_s$$

$$C_1 = \frac{2(T_i - T_s)}{\sqrt{\pi}}$$

$$\frac{T - T_s}{T_i - T_s} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \exp(-u^2) du \equiv \text{erf}(\eta)$$

$\text{erf}(\eta)$  - função erro de Gauss

# O sólido semi-infinito: fluxo de calor

$$\frac{T - T_s}{T_i - T_s} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} \exp(-u^2) du \equiv \text{erf}(\eta)$$

$$q_s'' = -k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = -k(T_i - T_s) \left. \frac{d(\text{erf } \eta)}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{\eta=0}$$

$$q_s'' = k(T_s - T_i) \left. \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-\eta^2) \frac{1}{\sqrt{4\alpha t}} \right|_{\eta=0}$$

$$q_s'' = \frac{k(T_s - T_i)}{\sqrt{\pi\alpha t}} = \frac{\sqrt{k\rho c}}{\sqrt{\pi t}} (T_s - T_i)$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c}$$

$\sqrt{k\rho c}$  é a efusividade térmica

# Soluções analíticas: casos CC

Temperatura na superfície é constante  $T(0, t) = T_s$

$$\frac{T(x, t) - T_s}{T_i - T_s} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

$$q_s'' = \frac{k(T_s - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

Fluxo térmico na superfície é constante  $q_s'' = q_0''$

$$T(x, t) - T_i = \frac{2q_0''}{k} \sqrt{\frac{\alpha t}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) - \frac{q_0'' x}{k} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

# Soluções analíticas: casos CC

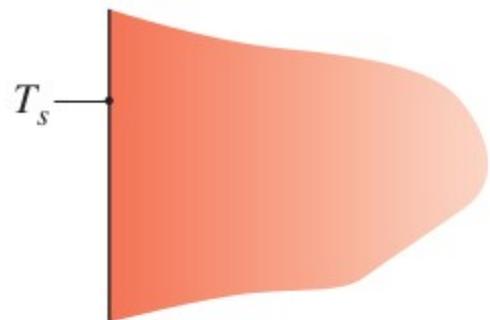
Convecção na superfície  $-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h(T_{\infty} - T(0, t))$

$$\frac{T(x, t) - T_i}{T_{\infty} - T_i} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - \left[ \exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2 \alpha t}{k^2}\right) \right] \left[ \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right) \right]$$

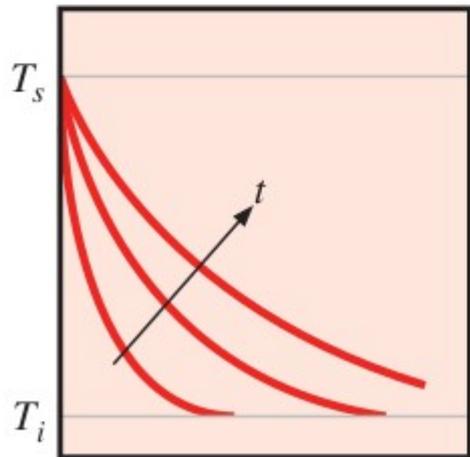
Case (1)

$$T(x, 0) = T_i$$

$$T(0, t) = T_s$$



$x$

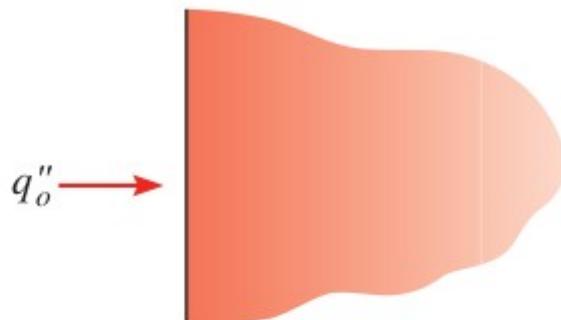


$x$

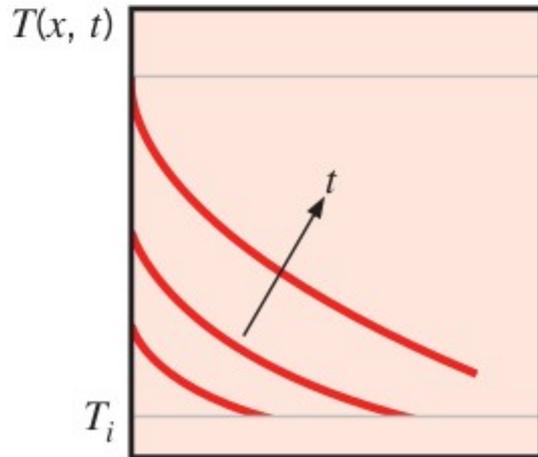
Case (2)

$$T(x, 0) = T_i$$

$$-k \partial T / \partial x \big|_{x=0} = q_o''$$



$x$

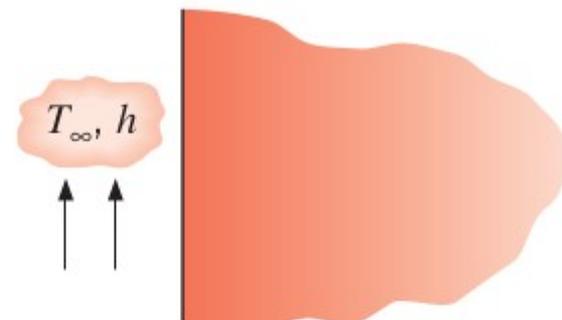


$x$

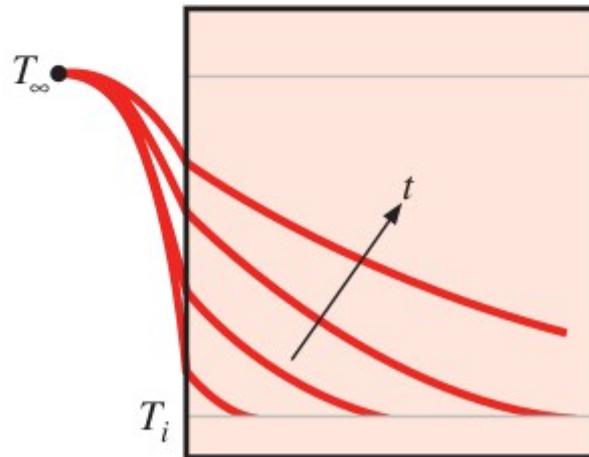
Case (3)

$$T(x, 0) = T_i$$

$$-k \partial T / \partial x \big|_{x=0} = h[T_\infty - T(0, t)]$$

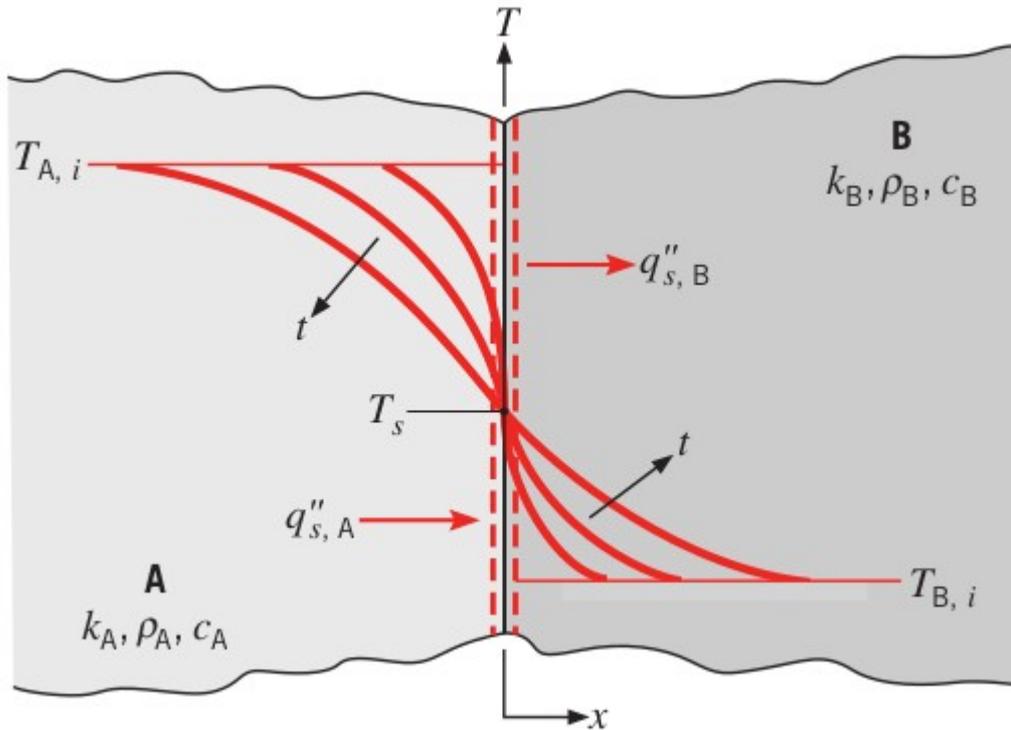


$x$



$x$

# Dois sólidos semi-infinitos



$$q''_{s,A} = q''_{s,B}$$

$$\frac{-k_A(T_s - T_{A,i})}{\sqrt{\pi \alpha_A t}} = \frac{k_B(T_s - T_{B,i})}{\sqrt{\pi \alpha_B t}}$$

$$T_s = \frac{\sqrt{k_A \rho_A c_A} T_{A,i} + \sqrt{k_B \rho_B c_B} T_{B,i}}{\sqrt{k_A \rho_A c_A} + \sqrt{k_B \rho_B c_B}}$$

Efusividade térmica  $m \equiv \sqrt{k \rho c}$  desempenha um papel de fator de ponderação que determina se  $T_s$  se aproxima mais de  $T_A$  ( $m_A > m_B$ ) ou de  $T_B$  ( $m_B > m_A$ )

# Métodos de Diferenças Finitas

## Método **Explícito**

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Aplicamos a diferença central para as derivadas espaciais com índices  $(m, n)$ .  
Discretização no tempo com índice  $p$ , utilizando o método explícito

$$t = p \Delta t$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta t}$$

# Métodos de Diferenças Finitas

$$\frac{1}{\alpha} \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta t} = \frac{T_{m-1,n}^p - 2T_{m,n}^p + T_{m+1,n}^p}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n-1}^p - 2T_{m,n}^p + T_{m,n+1}^p}{(\Delta y)^2}$$

$$\Delta x = \Delta y \quad Fo = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$T_{m,n}^{p+1} = Fo (T_{m-1,n}^p + T_{m+1,n}^p + T_{m,n-1}^p + T_{m,n+1}^p) + (1 - 4Fo) T_{m,n}^p$$

Para sistema unidimensional

$$T_m^{p+1} = Fo (T_{m-1}^p + T_{m+1}^p) + (1 - 2Fo) T_m^p$$

# Critérios de estabilidade

- A acurácia da solução pode ser melhorada, diminuindo  $\Delta x$  e  $\Delta t$
- O tempo de computação aumenta com a diminuição de  $\Delta x$  e  $\Delta t$
- A escolha de  $\Delta x$  normalmente se baseia num compromisso entre precisão e requisitos computacionais
- O valor de  $\Delta t$  não pode ser escolhido independentemente e determinado pelas exigências da estabilidade

# Critérios de estabilidade

O critério de estabilidade é determinado pela exigência de que o coeficiente associado aos termos envolvendo  $T_{m,n}^p$  seja maior ou igual a zero

Para sistema unidimensional

$$T_m^{p+1} = Fo(T_{m-1}^p + T_{m+1}^p) + (1 - 2Fo)T_m^p$$
$$Fo \leq \frac{1}{2}$$

Para sistema bidimensional

$$T_{m,n}^{p+1} = Fo(T_{m-1,n}^p + T_{m+1,n}^p + T_{m,n-1}^p + T_{m,n+1}^p) + (1 - 4Fo)T_{m,n}^p$$
$$Fo \leq \frac{1}{4}$$

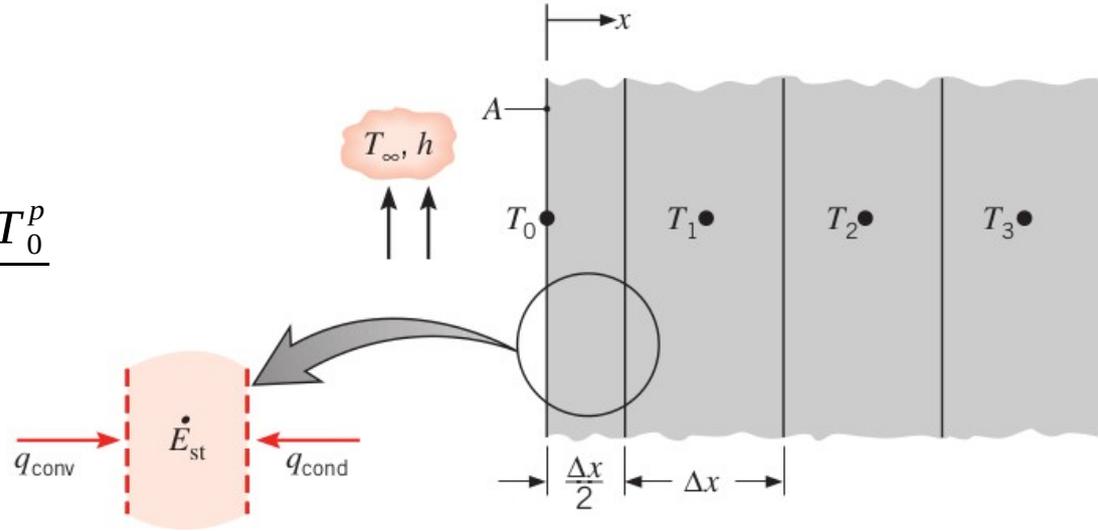
# Uso de balanço de energia

$$E_{in} + E_g = E_{st}$$

Consideramos que todos os fluxos de calor estão no sentido do nó

$$hA(T_{\infty} - T_0^p) + \frac{kA}{\Delta x}(T_1^p - T_0^p) = \rho c A \frac{\Delta x}{2} \frac{T_0^{p+1} - T_0^p}{\Delta t}$$

$$T_0^{p+1} = \frac{2h\Delta t}{\rho c \Delta x}(T_{\infty} - T_0^p) + \frac{2\alpha \Delta t}{\Delta x^2}(T_1^p - T_0^p) + T_0^p$$



Reconhecendo

$$\frac{2h\Delta t}{\rho c \Delta x} = 2 \frac{h\Delta x}{k} \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} = 2 Bi Fo$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c}$$

$$Bi = \frac{h\Delta x}{k}$$

$$Fo = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$$

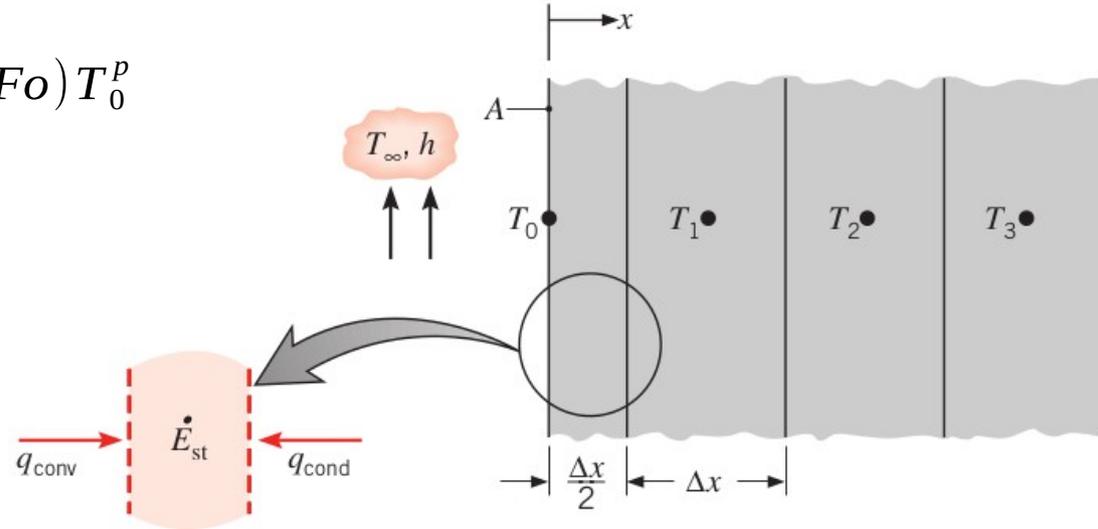
$$T_0^{p+1} = 2 Fo (T_1^p + Bi T_{\infty}) + (1 - 2 Fo - 2 Bi Fo) T_0^p$$

# Cr terio de estabilidade

$$T_0^{p+1} = 2Fo(T_1^p + BiT_\infty) + (1 - 2Fo - 2BiFo)T_0^p$$

$$1 - 2Fo - 2BiFo \geq 0$$

$$Fo(1 + Bi) \leq \frac{1}{2}$$



Como  $Bi \geq 0 \rightarrow$  este cr terio   mais r gido

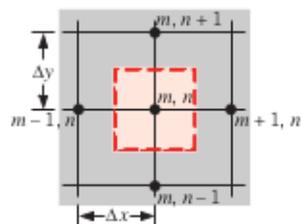
(a) Explicit Method

(b) Implicit Method

Conguration

Finite-Difference Equation

Stability Criterion

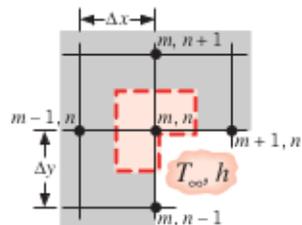


$$T_{m,n}^{p+1} = Fo(T_{m+1,n}^p + T_{m-1,n}^p + T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p) + (1 - 4Fo)T_{m,n}^p \quad (5.79)$$

$$Fo \leq \frac{1}{4} \quad (5.83)$$

$$(1 + 4Fo)T_{m,n}^{p+1} - Fo(T_{m+1,n}^{p+1} + T_{m-1,n}^{p+1} + T_{m,n+1}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1}) = T_{m,n}^p \quad (5.95)$$

1. Interior node

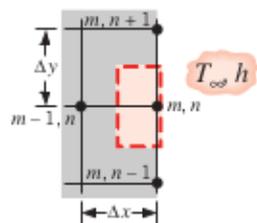


$$T_{m,n}^{p+1} = \frac{2}{3}Fo(T_{m+1,n}^p + 2T_{m-1,n}^p + 2T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p + 2Bi T_\infty) + (1 - 4Fo - \frac{4}{3}Bi Fo)T_{m,n}^p \quad (5.88)$$

$$Fo(3 + Bi) \leq \frac{3}{4} \quad (5.89)$$

$$(1 + 4Fo(1 + \frac{1}{3}Bi))T_{m,n}^{p+1} - \frac{2}{3}Fo \cdot (T_{m+1,n}^{p+1} + 2T_{m-1,n}^{p+1} + 2T_{m,n+1}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1}) = T_{m,n}^p + \frac{4}{3}Bi Fo T_\infty \quad (5.98)$$

2. Node at interior corner with convection

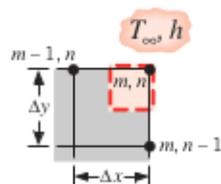


$$T_{m,n}^{p+1} = Fo(2T_{m-1,n}^p + T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p + 2Bi T_\infty) + (1 - 4Fo - 2Bi Fo)T_{m,n}^p \quad (5.90)$$

$$Fo(2 + Bi) \leq \frac{1}{2} \quad (5.91)$$

$$(1 + 2Fo(2 + Bi))T_{m,n}^{p+1} - Fo(2T_{m-1,n}^{p+1} + T_{m,n+1}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1}) = T_{m,n}^p + 2Bi Fo T_\infty \quad (5.99)$$

3. Node at plane surface with convection<sup>a</sup>



$$T_{m,n}^{p+1} = 2Fo(T_{m-1,n}^p + T_{m,n-1}^p + 2Bi T_\infty) + (1 - 4Fo - 4Bi Fo)T_{m,n}^p \quad (5.92)$$

$$Fo(1 + Bi) \leq \frac{1}{4} \quad (5.93)$$

$$(1 + 4Fo(1 + Bi))T_{m,n}^{p+1} - 2Fo(T_{m-1,n}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1}) = T_{m,n}^p + 4Bi Fo T_\infty \quad (5.100)$$

4. Node at exterior corner with convection

# Método Implícito

$$\frac{1}{\alpha} \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta t} = \frac{T_{m-1,n}^{p+1} - 2T_{m,n}^{p+1} + T_{m+1,n}^{p+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n-1}^{p+1} - 2T_{m,n}^{p+1} + T_{m,n+1}^{p+1}}{(\Delta y)^2}$$

$$\Delta x = \Delta y$$

$$(1 + 4Fo) T_{m,n}^{p+1} - Fo(T_{m-1,n}^{p+1} + T_{m+1,n}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1} + T_{m,n+1}^{p+1}) = T_{m,n}^p$$

Do balanço de energia para o ponto nodal na superfície

$$(1 + 2Fo + 2BiFo) T_0^{p+1} - 2Fo T_1^{p+1} = 2Fo Bi T_\infty + T_0^p$$

Para o ponto nodal inferior

$$(1 + 2Fo) T_m^{p+1} - Fo(T_{m-1}^{p+1} + T_{m+1}^{p+1}) = T_0^p$$