

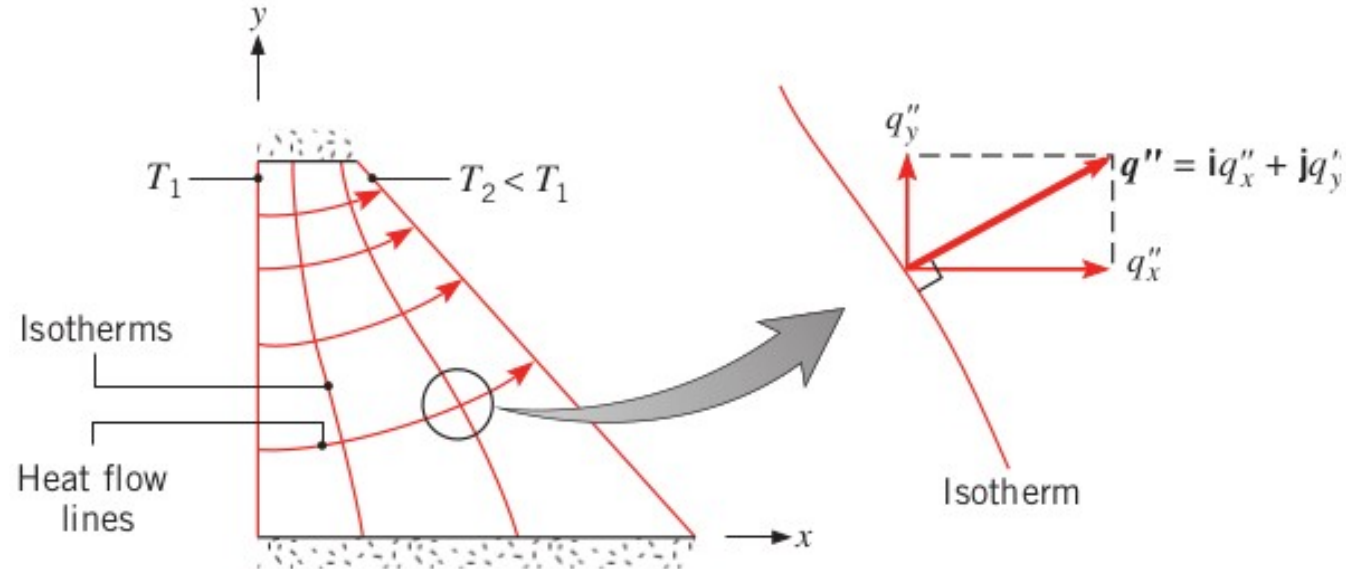


Condução bidimensional em regime estacionário

Prof. Alexei Essiptchouk

**Dep. Engenharia Ambiental
Instituto de Ciência e Tecnologia
Universidade Estadual Paulista
“Júlio de Mesquita Filho”**

Condução bidimensional



Isoterma – linha com $T = \text{const}$

Linhas de fluxo de calor (adiabatas) – linhas perpendiculares as isothermas

Nenhum calor pode ser transferido por condução cruzando uma linha de fluxo de calor

Objetivos

- Determinar a **distribuição da temperatura** no meio

Para condições bidimensionais, em regime estacionário, sem geração de calor e com condutividade térmica constante

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \text{Derivadas parciais!!!}$$

- Determinar os **componentes do fluxo térmico**

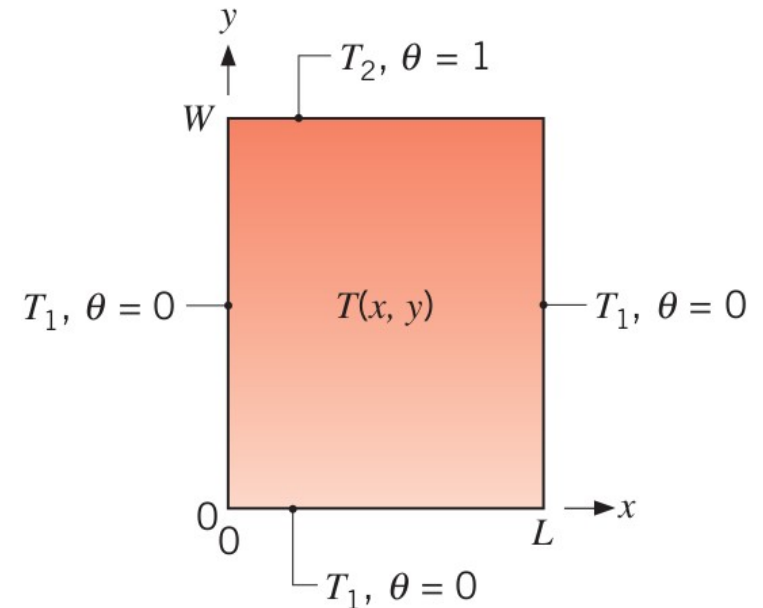
$$q_x'' = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad q_y'' = -k \frac{\partial T}{\partial y}$$

Métodos: exato - analítico, aproximados - gráfico e numérico (diferenças finitas, elementos finitos ou elementos de contorno)

Método analítico

Três lados de uma placa retangular fina ou de uma haste retangular longa são mantidos a uma temperatura constante T_1 , enquanto o quarto lado é mantido a uma temperatura constante $T_2 \neq T_1$.

Assumindo que a transferência de calor é desprezível das superfícies da placa ou nas extremidades da haste, os gradientes de temperatura normais ao plano x – y podem ser negligenciados e a transferência de calor por condução ocorre principalmente nos eixos x e y .



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Método analítico

$$\theta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$$

CC:

$$\begin{aligned} \theta(0, y) &= 0 & \theta(x, 0) &= 0 \\ \theta(L, y) &= 0 & \theta(x, W) &= 1 \end{aligned}$$

Supomos que a solução pode ser escrita como um produto

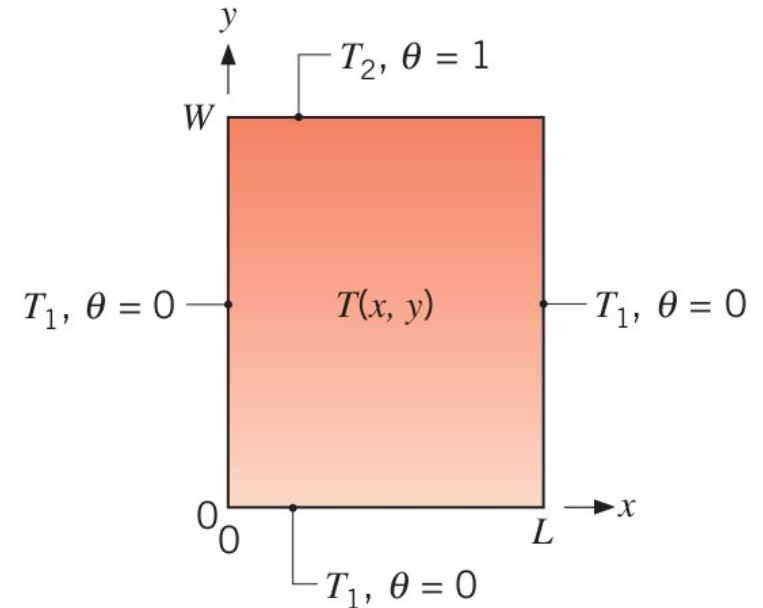
$$\theta(x, y) = X(x)Y(y)$$

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \lambda^2$$

$$\lambda^2 > 0$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0$$



Método analítico

$$\frac{d^2 X}{d x^2} + \lambda^2 X = 0$$

$$\frac{d^2 Y}{d x^2} - \lambda^2 Y = 0$$

$$X = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$$

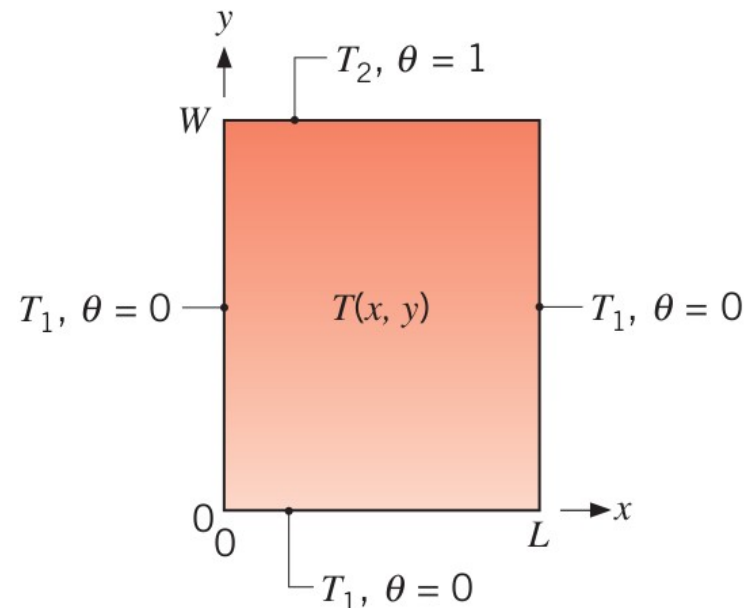
$$Y = C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y}$$

$$\theta = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x)(C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y})$$

$$\text{CC: } \theta(0, y) = 0 \quad \longrightarrow \quad C_1 = 0$$

$$\theta(x, 0) = 0 \quad \longrightarrow \quad C_2 \sin \lambda x (C_3 + C_4) = 0 \quad \longrightarrow \quad C_3 = -C_4$$

Caso $C_2 = 0$ resulta em $\theta(x, y) = 0$ que não satisfaz $\theta(x, W) = 1$



Método analítico

CC: $\theta(L, y) = 0$

$$C_2 C_4 \sin \lambda L (e^{-\lambda y} - e^{\lambda y}) = 0$$

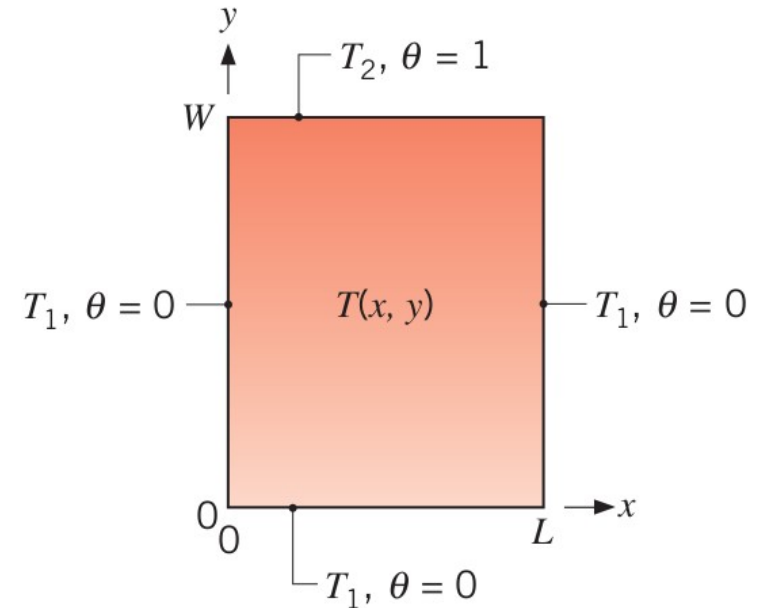
$$\lambda = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$n = 0$ descartado pois resulta em $\theta(x, y) = 0$

$$\theta = C_2 C_4 \sin \frac{n\pi x}{L} (e^{-\frac{n\pi y}{L}} - e^{\frac{n\pi y}{L}})$$

$$\theta = C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi y}{L}$$

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi y}{L} \quad \text{Superposição das soluções}$$



Método analítico

Para determinar C_n utilizamos a condição contorna

$$\theta(x, W) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi W}{L}$$

Funções ortogonais $g_1(x), g_2(x), g_3(x), \dots$ no intervalo $a \leq x \leq b$

$$\int_a^b g_m(x) g_n(x) dx = 0$$

Qualquer função $f(x)$ pode ser representada em termos $g_n(x)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_n(x)$$

Os coeficientes A_n podem ser determinados pela multiplicação de cada lado por $g_m(x)$

$$\int_a^b f(x) g_m(x) dx = \int_a^b g_m(x) \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_n(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) g_m(x) dx = A_m \int_a^b g_m^2(x) dx$$

$$A_n = \frac{\int_a^b f(x) g_n(x) dx}{\int_a^b g_n^2(x) dx}$$

Método analítico

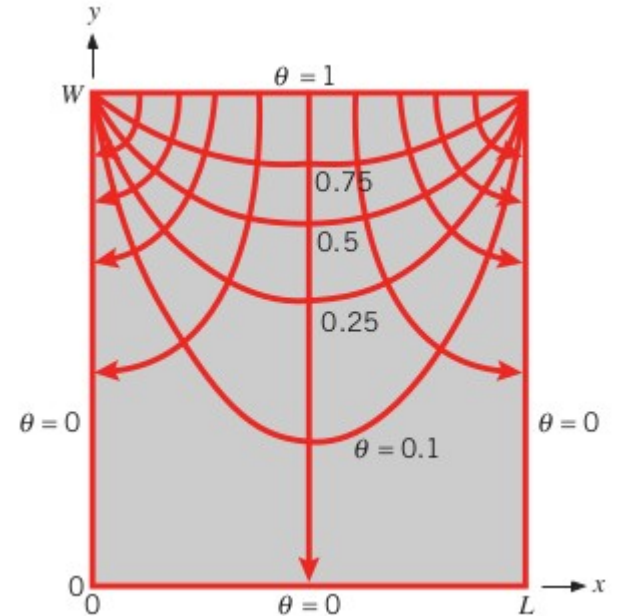
Escolhendo $f(x) = 1$ e $g_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$

$$A_n = \frac{\int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx}{\int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx} = \frac{2(-1)^{n+1} + 1}{\pi n}$$

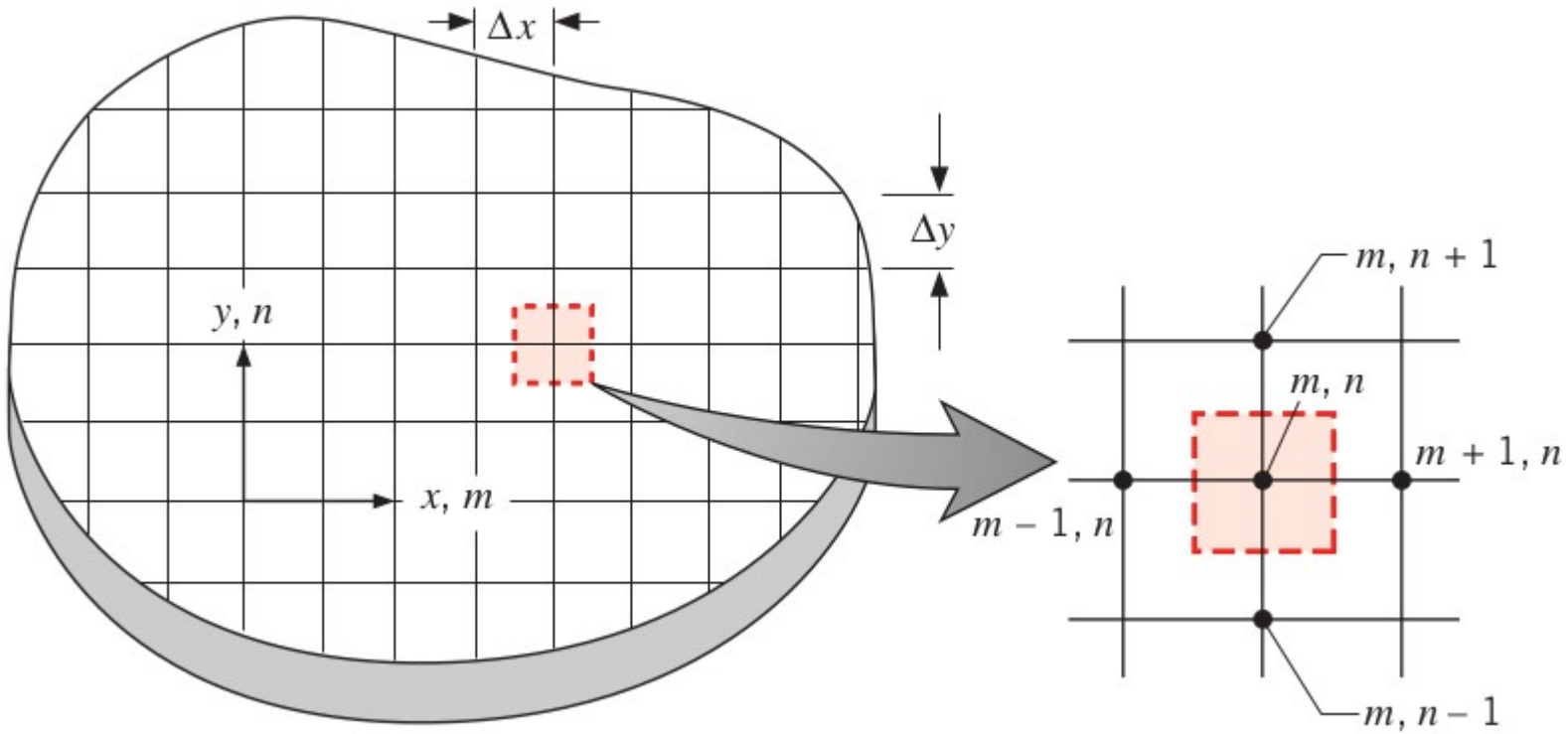
$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi W}{L}$$

$$C_n = \frac{2[(-1)^{n+1} + 1]}{\pi n \sinh \frac{n\pi W}{L}}$$

$$\theta(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L} \frac{\sinh \frac{n\pi y}{L}}{\sinh \frac{n\pi W}{L}}$$

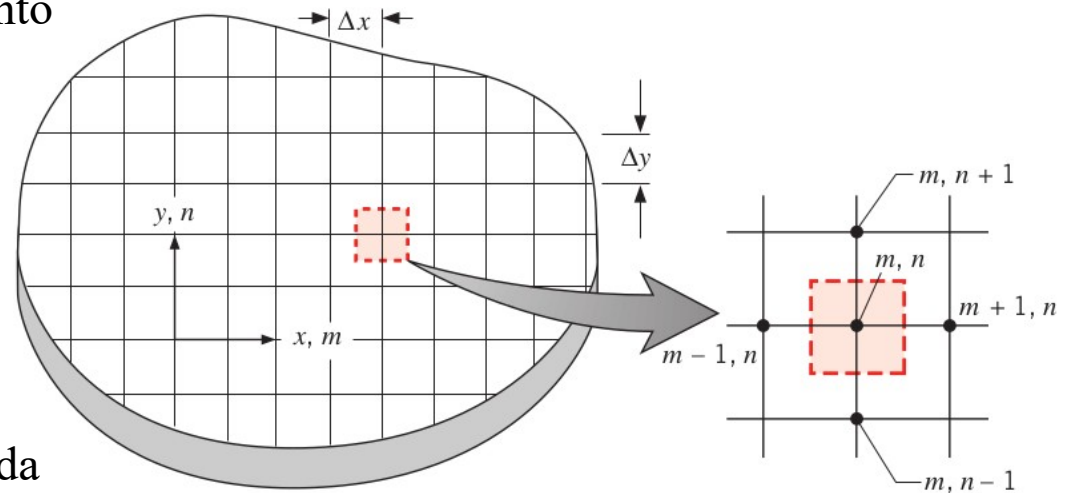


Equações de diferenças finitas



Rede nodal

- Em métodos numéricos as soluções são determinados em pontos discretos
- Primeira etapa – seleção destes pontos (ponto nodal ou nó)
- Rede ou Grade ou Malha é uma agregação dos pontos
- As posições x e y são identificados pelos índices m e n , respectivamente
- Cada nó representa determinada região e a sua temperatura é uma temperatura média da região



Equação de calor

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

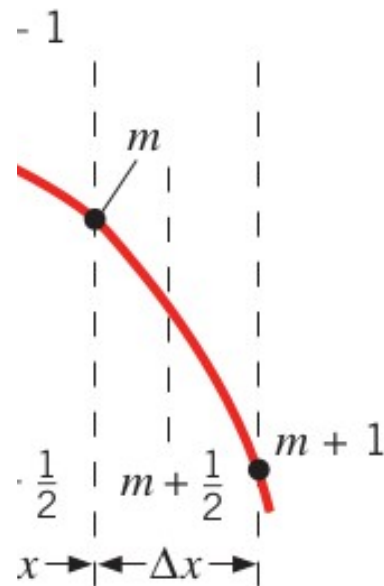
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{m+\frac{1}{2},n} - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{m-\frac{1}{2},n}}{\Delta x}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{m+\frac{1}{2},n} = \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{m-\frac{1}{2},n} = \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{m-1,n} - 2T_{m,n} + T_{m+1,n}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{T_{m,n-1} - 2T_{m,n} + T_{m,n+1}}{(\Delta y)^2}$$



$$\Delta x = \Delta y$$

$$T_{m,n-1} + T_{m,n+1} + T_{m-1,n} + T_{m+1,n} - 4T_{m,n} = 0$$

Equação de calor: método do balanço de energia

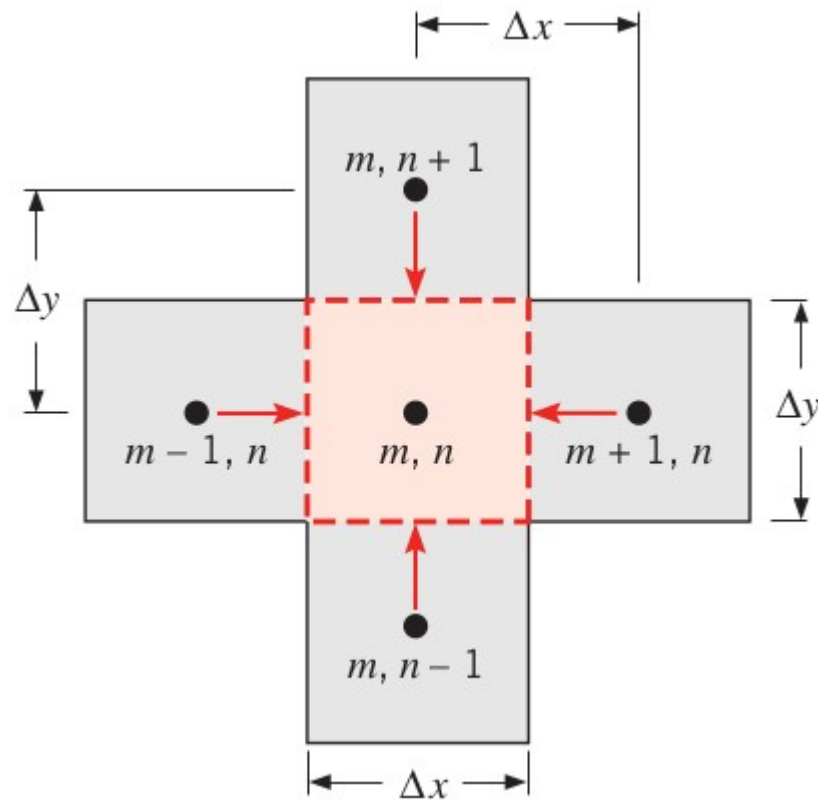
Usado em problemas envolvendo

- múltiplos materiais,
- presença de fontes de calor
- Superfícies expostas que não estejam no direção de um eixo do sistema coordenado

Aplica-se conservação da energia em um volume de controle no entorno da região nodal

Assume-se que todos os fluxos térmicos estão dirigidos para dentro do ponto nodal

$$\dot{E}_{ent} + \dot{E}_g = 0$$
$$\sum_{i=1}^4 q_{(i) \rightarrow (m,n)} + \dot{q}(\Delta x \cdot \Delta y \cdot 1) = 0$$



Equação de calor: método do balanço de energia

Consideramos que a transferência por condução ocorre exclusivamente ao longo das faixas que estão orientadas nas direções x e y .

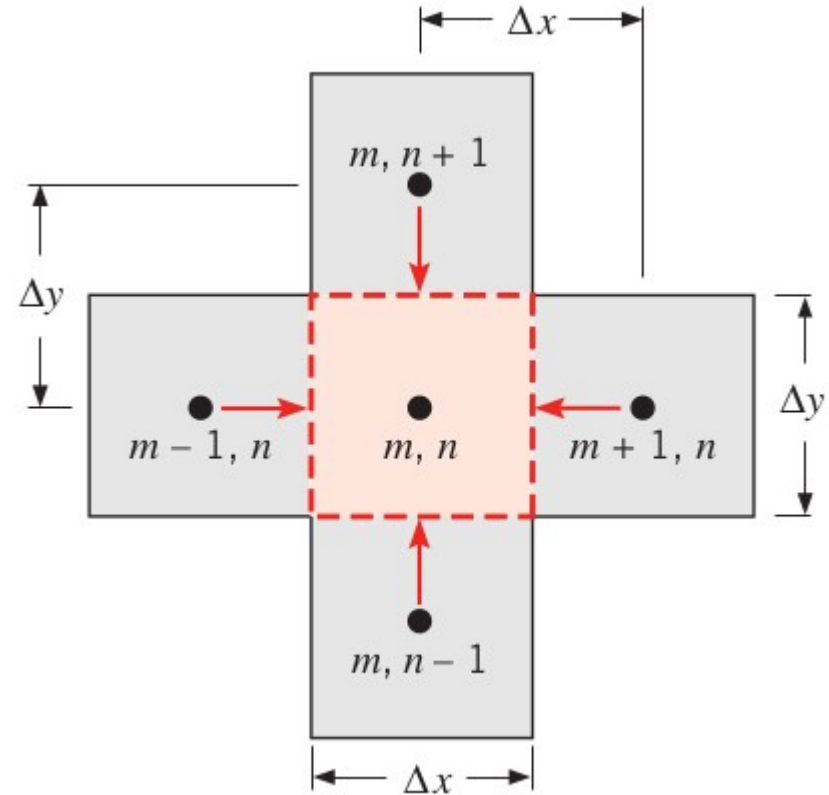
$$q_{(m-1,n) \rightarrow (m,n)} = k(\Delta y \cdot 1) \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta x}$$

$$q_{(m+1,n) \rightarrow (m,n)} = k(\Delta y \cdot 1) \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x}$$

$$q_{(m,n-1) \rightarrow (m,n)} = k(\Delta x \cdot 1) \frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta y}$$

$$q_{(m,n+1) \rightarrow (m,n)} = k(\Delta x \cdot 1) \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y}$$

$$T_{m,n-1} + T_{m,n+1} + T_{m-1,n} + T_{m+1,n} + \frac{\dot{q}(\Delta x)^2}{k} - 4T_{m,n} = 0$$



Equação de calor: método do balanço de energia

Tratamento dos contornos

$$q_{(m-1,n) \rightarrow (m,n)} = k(\Delta y \cdot 1) \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta x}$$

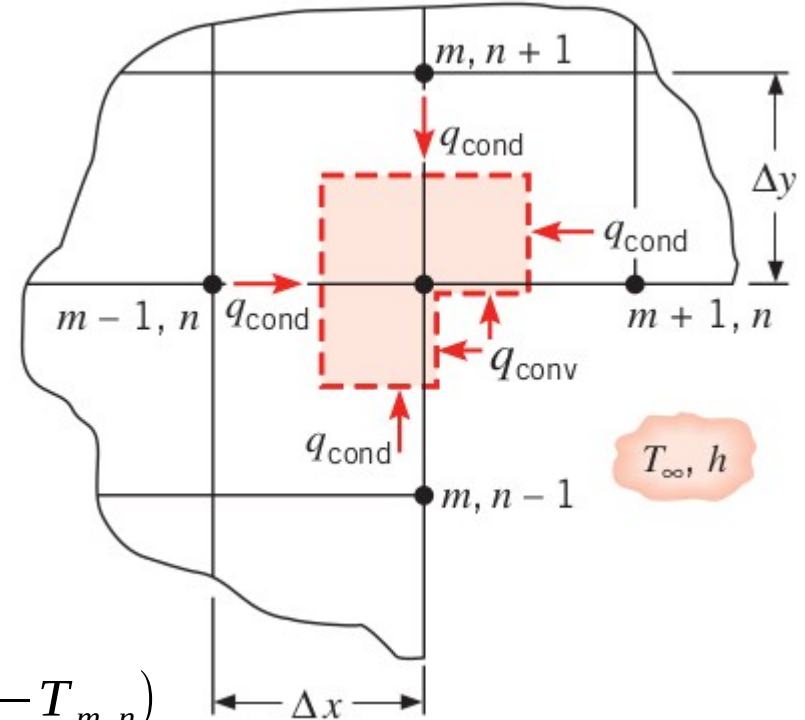
$$q_{(m,n+1) \rightarrow (m,n)} = k(\Delta x \cdot 1) \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y}$$

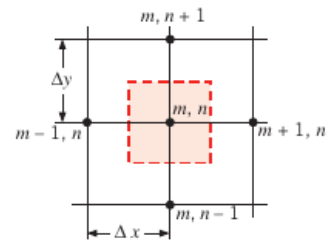
$$q_{(m+1,n) \rightarrow (m,n)} = k\left(\frac{\Delta y}{2} \cdot 1\right) \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x}$$

$$q_{(m,n-1) \rightarrow (m,n)} = k\left(\frac{\Delta x}{2} \cdot 1\right) \frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta y}$$

$$q_{(\infty) \rightarrow (m,n)} = h\left(\frac{\Delta x}{2} \cdot 1\right)(T_{\infty} - T_{m,n}) + h\left(\frac{\Delta y}{2} \cdot 1\right)(T_{\infty} - T_{m,n})$$

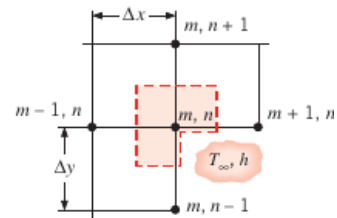
$$\Delta x = \Delta y \quad T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + \frac{1}{2}(T_{m,n-1} + T_{m+1,n}) + \frac{h\Delta x}{k}T_{\infty} - \left(3 + \frac{h\Delta x}{k}\right)T_{m,n} = 0$$





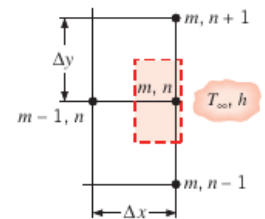
$$T_{m,n-1} + T_{m,n+1} + T_{m-1,n} + T_{m+1,n} - 4T_{m,n} = 0$$

Ponto nodal interior



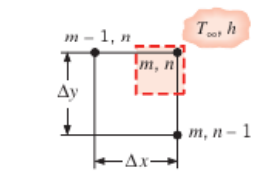
$$2(T_{m-1,n} + T_{m,n+1}) + (T_{m,n-1} + T_{m+1,n}) + 2\frac{h\Delta x}{k}T_{\infty} - 2\left(3 + \frac{h\Delta x}{k}\right)T_{m,n} = 0$$

Ponto nodal em um vértice interno com convecção



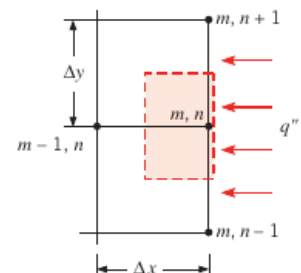
$$(2T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) + 2\frac{h\Delta x}{k}T_{\infty} - 2\left(2 + \frac{h\Delta x}{k}\right)T_{m,n} = 0$$

Ponto nodal em uma superfície plana com convecção



$$(T_{m-1,n} + T_{m,n-1}) + 2\frac{h\Delta x}{k}T_{\infty} - 2\left(1 + \frac{h\Delta x}{k}\right)T_{m,n} = 0$$

Ponto nodal em um vértice externo com convecção



$$(2T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) + 2\frac{q''\Delta x}{k}T_{\infty} - 4T_{m,n} = 0$$

Ponto nodal em uma superfície plana com fluxo térmico uniforme

Equação de calor: método da resistência térmica

$$q_{(m-1,n) \rightarrow (m,n)} = k(\Delta y \cdot 1) \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta x}$$

$$q_{(m-1,n) \rightarrow (m,n)} = \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\frac{\Delta x}{k(\Delta y \cdot 1)}} = \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{R_{cond}}$$

$$q_{(\infty) \rightarrow (m,n)} = h\left(\frac{\Delta x}{2} \cdot 1\right)(T_{\infty} - T_{m,n}) + h\left(\frac{\Delta y}{2} \cdot 1\right)(T_{\infty} - T_{m,n})$$

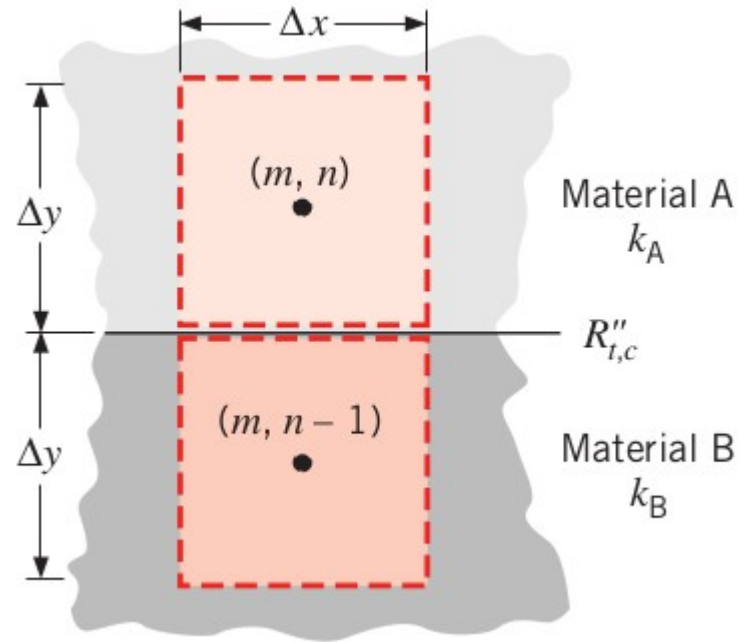
$$q_{(\infty) \rightarrow (m,n)} = \frac{T_{\infty} - T_{m,n}}{\left[h\left(\frac{\Delta x}{2} \cdot 1\right) + h\left(\frac{\Delta y}{2} \cdot 1\right)\right]^{-1}}$$

Equação de calor: método do resistência térmica

Exemplo: Interface que separa dois materiais diferentes e é caracterizada por uma resistência de contato

$$q_{(m,n) \rightarrow (m,n-1)} = \frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{R_{total}}$$

$$R_{total} = \frac{\Delta y/2}{k_A(\Delta x \cdot 1)} + \frac{R''_{cont}}{\Delta x \cdot 1} + \frac{\Delta y/2}{k_B(\Delta x \cdot 1)}$$



Resolução das equações diferenciais finitas

Seja um sistema composto de N equações com N temperaturas desconhecidas

Identificamos os pontos nodais por um único número inteiro subscrito, em vez de um índice duplo (m, n)

Formamos um sistema das equações lineares

$$\begin{aligned}a_{11}T_1 + a_{12}T_2 + \dots + a_{1N}T_N &= C_1 \\a_{21}T_1 + a_{22}T_2 + \dots + a_{2N}T_N &= C_2 \\&\vdots \\a_{N1}T_1 + a_{N2}T_2 + \dots + a_{NN}T_N &= C_N\end{aligned}$$

Resolução das equações diferenciais finitas

$$[A][T]=[C]$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ & & \ddots & \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_N \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix}$$

A – matriz de coeficientes

T – vetor solução

C – vetor do lado direito

Acurácia da solução

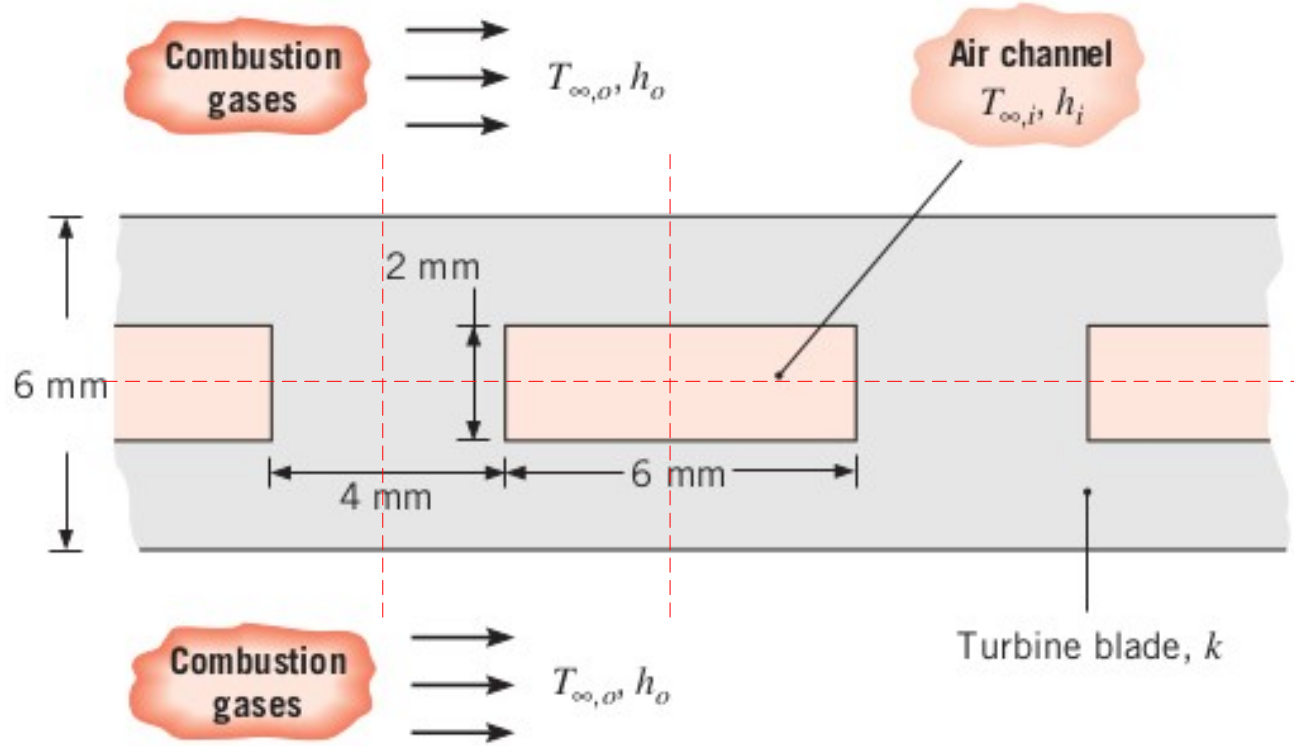
- Substituir a solução na equação do balanço de energia. Se resultado fica fora da grau de precisão – verificar as equações
- Resultado depende do espaçamento finito (Δx , Δy). Quando menor espaçamento – melhor o resultado, entretanto uma redução por metade quadruplica o número de nós.
- Comparação com solução exata

Problema

Um dos principais objetivos no avanço das tecnologias de motores de turbina a gás é aumentar o limite de temperatura associado à operação das pás da turbina a gás. Este limite determina a temperatura admissível de entrada do gás da turbina, que, por sua vez, influencia fortemente o desempenho geral do sistema.

Além de fabricar pás de turbina a partir de superligas especiais de alta resistência e alta temperatura, é comum usar resfriamento interno usinando canais de fluxo dentro das pás e direcionando o ar através dos canais. Desejamos avaliar o efeito de tal esquema aproximando a pá por um sólido retangular com canais retangulares. A pá, com condutividade térmica de $k = 25 \text{ W/m}\cdot\text{K}$, tem espessura de 6 mm. Cada canal possui uma seção transversal retangular de $2 \text{ mm} \times 6 \text{ mm}$ e há um espaçamento de 4 mm entre canais adjacentes.

Sob condições de operação nas quais $h_e = 1000 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$, $T_{\infty,e} = 1700 \text{ K}$, $h_i = 200 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ e $T_{\infty,i} = 400 \text{ K}$, determine o campo de temperatura na pá da turbina e a taxa de transferência de calor por unidade de comprimento para o canal.

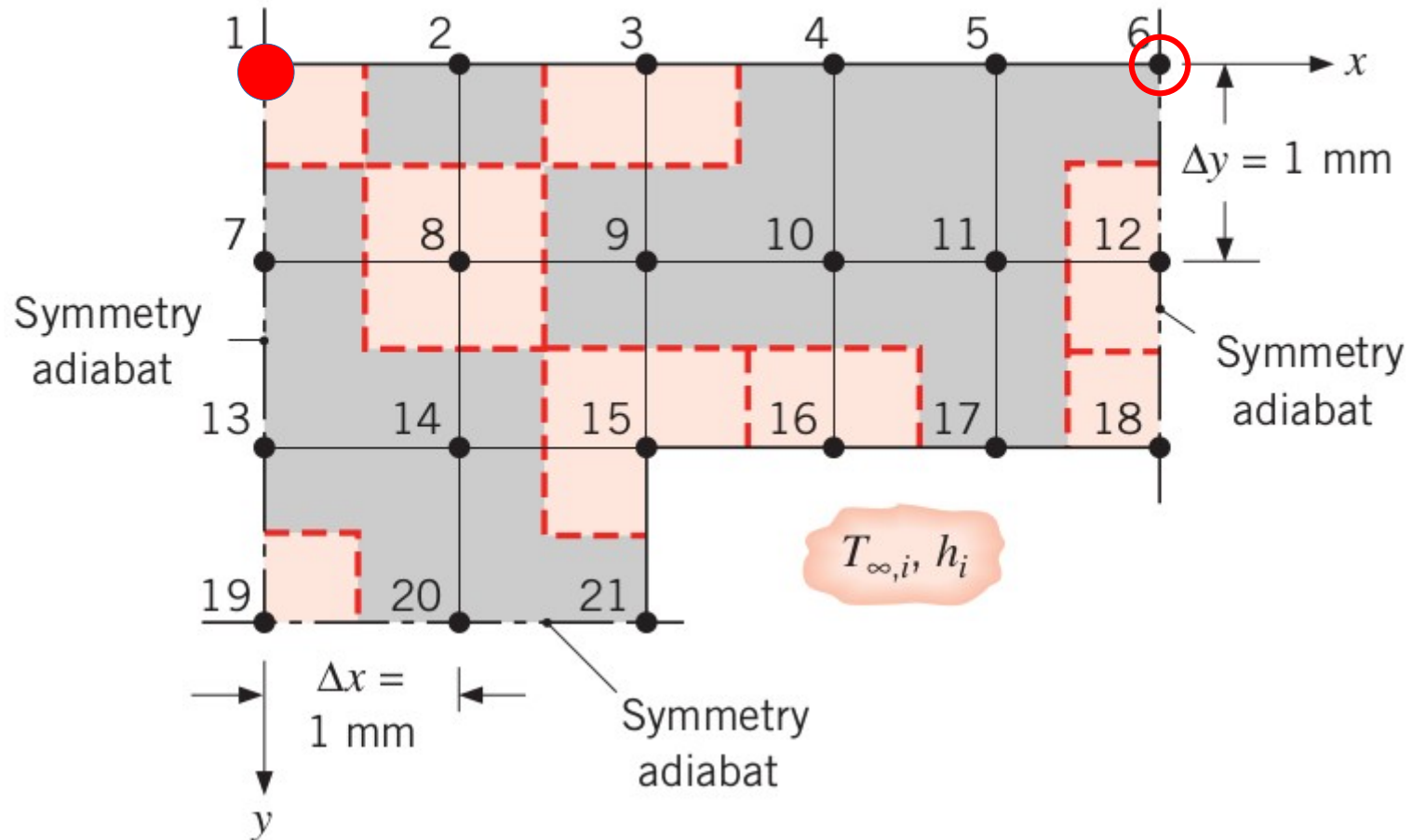


$$\begin{aligned}
 k &= 25 \text{ W/m}\cdot\text{K} \\
 h_e &= 1000 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}, \\
 T_{\infty,e} &= 1700 \text{ K}, \\
 h_i &= 200 \text{ W/m}^2\cdot\text{K} \\
 T_{\infty,i} &= 400 \text{ K}
 \end{aligned}$$

$$T_2 + T_7 - \left(2 + \frac{h_e \Delta x}{k}\right) T_1 = \frac{-h \Delta x}{k} T_{\infty, e}$$

$T_{\infty, o}, h_o$

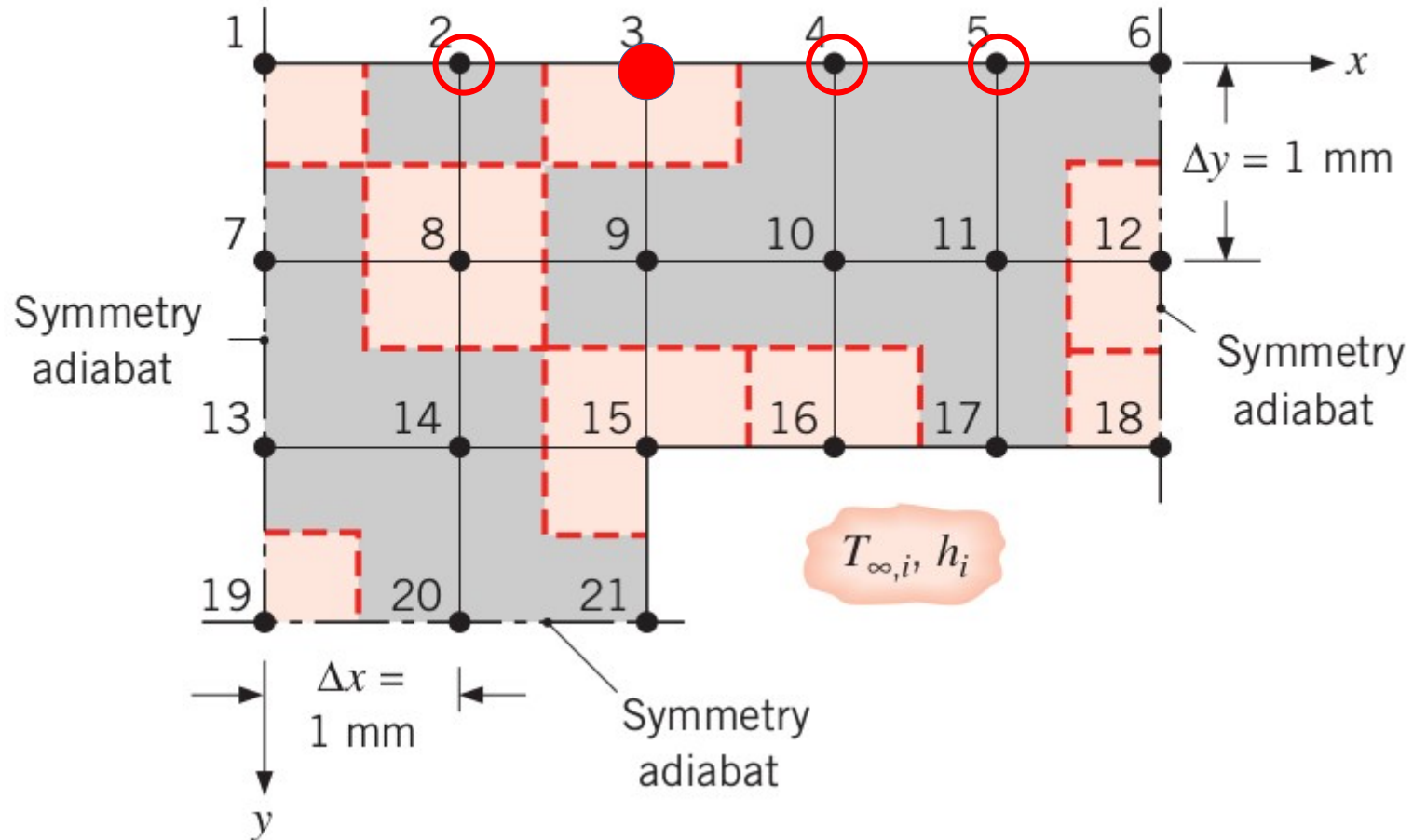
$$-\left(2 + \frac{h_e \Delta x}{k}\right) T_1 + T_2 + T_7 = \frac{-h \Delta x}{k} T_{\infty, e}$$



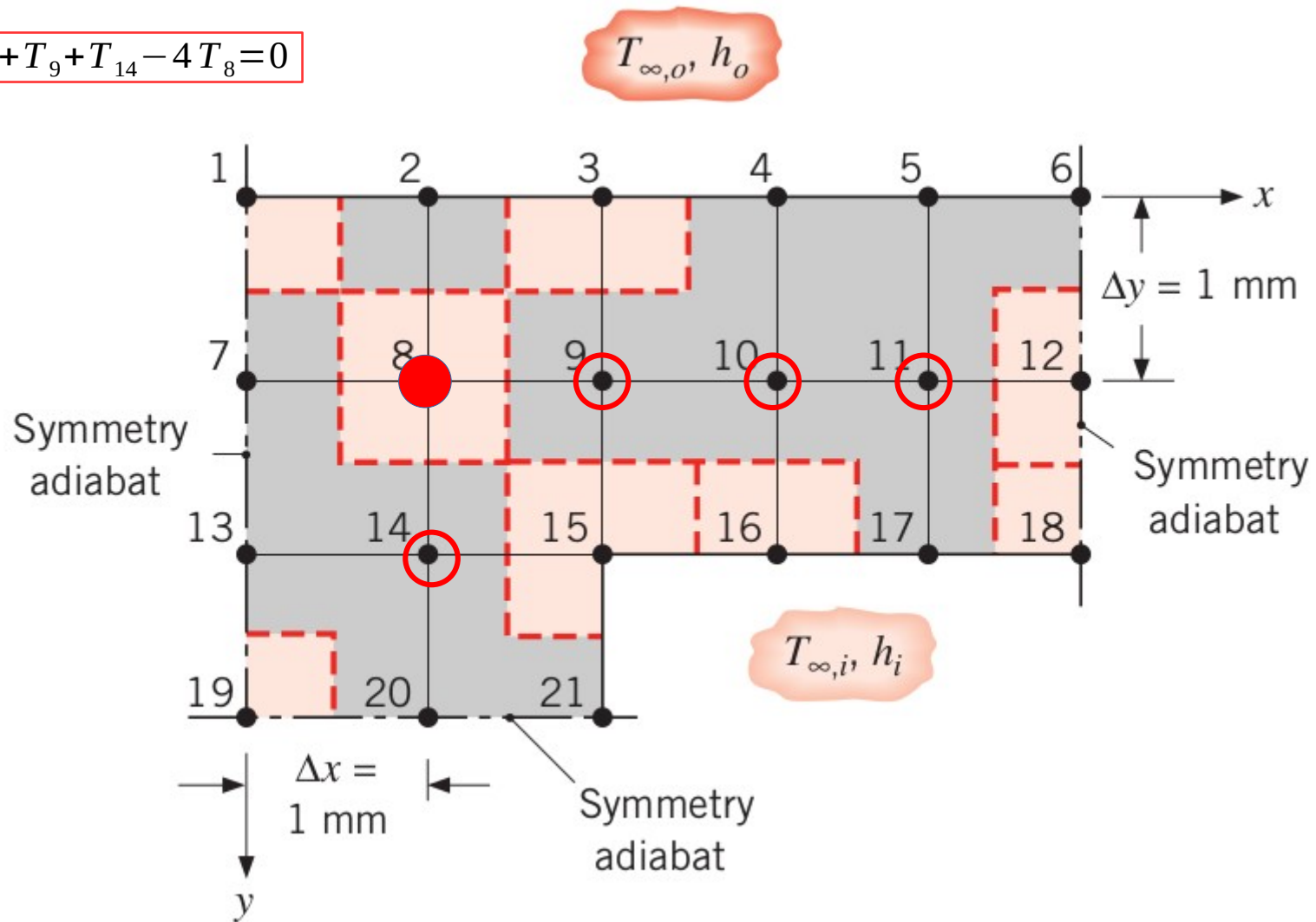
$$T_2 + T_4 + 2T_9 - 2\left(2 + \frac{h_e \Delta x}{k}\right) T_3 = \frac{-2h \Delta x}{k} T_{\infty, e}$$

$T_{\infty, o}, h_o$

$$T_2 - 2\left(2 + \frac{h_e \Delta x}{k}\right) T_3 + T_4 + 2T_9 = \frac{-2h \Delta x}{k} T_{\infty, e}$$

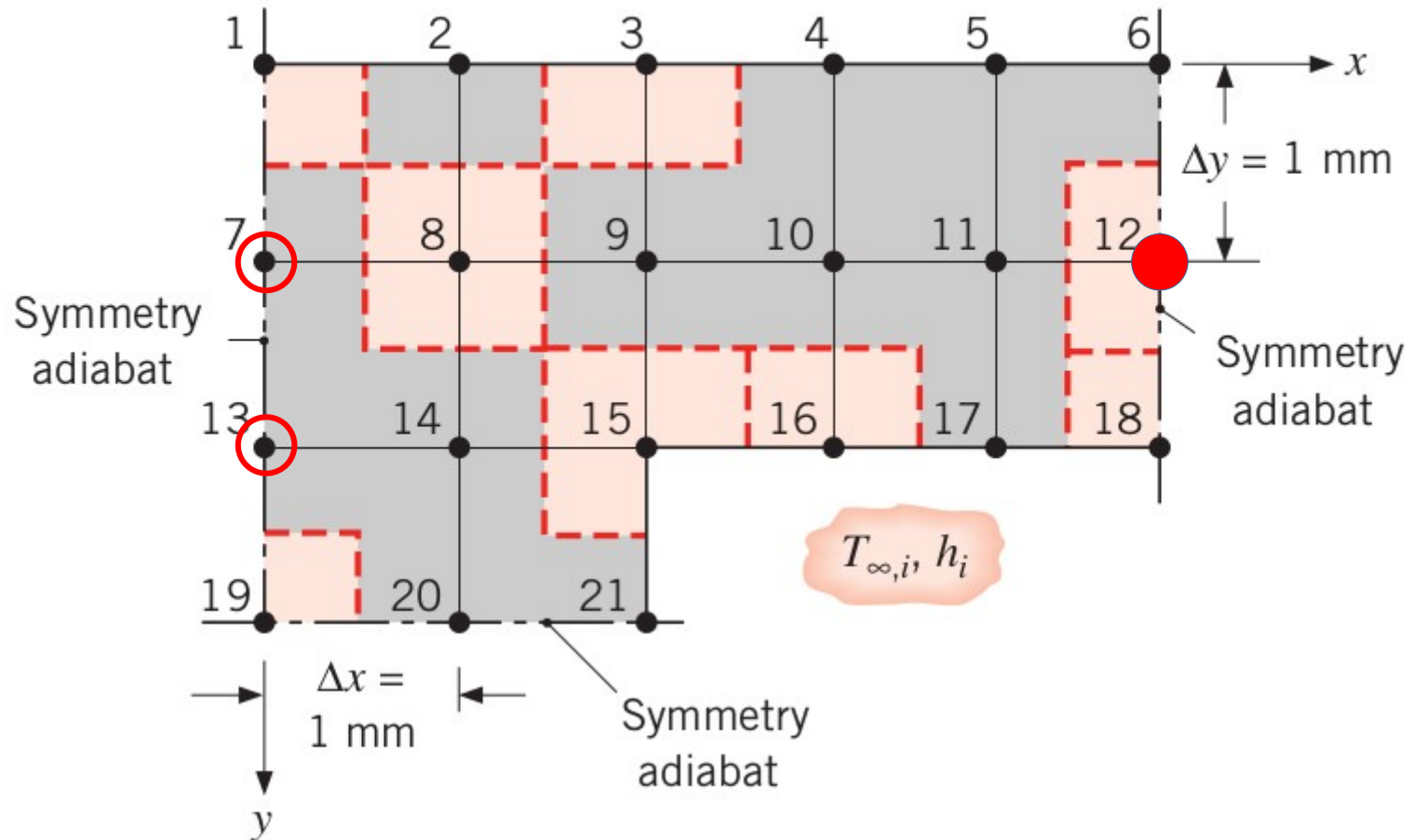


$$T_2 + T_7 + T_9 + T_{14} - 4T_8 = 0$$



$$T_6 + 2T_{11} + T_{18} - 4T_{12} = 0$$

$$T_6 + 2T_{11} - 4T_{12} + T_{18} = 0$$



$$-\left(2+\frac{h_e \Delta x}{k}\right) T_1+T_2+T_7=\frac{-h \Delta x}{k} T_{\infty, e}$$

$$T_2 - 2\left(2 + \frac{h_e \Delta x}{k}\right) T_3 + T_4 + 2T_9 = \frac{-2h\Delta x}{k} T_{\infty, e}$$

$$T_2 + T_7 + T_9 + T_{14} - 4T_8 = 0$$

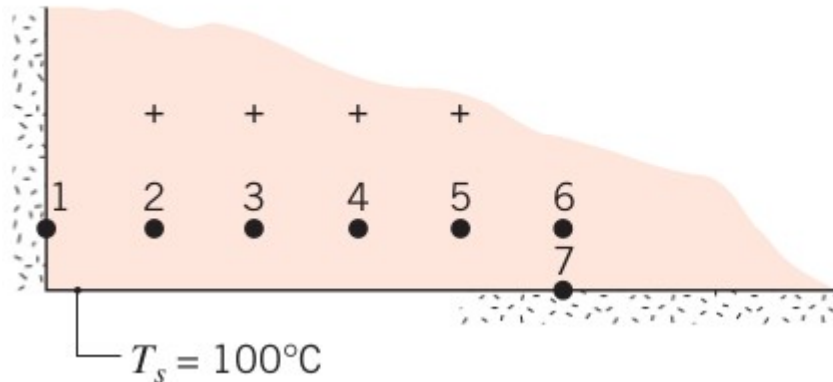
$$T_6 + 2T_{11} - 4T_{12} + T_{18} = 0$$

1	0	0	0	0	2	-4	0	0	0	0	0	1
---	---	---	---	---	---	----	---	---	---	---	---	---

$$[C] = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$$

Exemplo

Considere a rede para um sistema bidimensional, sem geração volumétrica interna de calor, que possui as temperaturas nodais mostradas a seguir. Sendo o espaçamento da malha de 100 mm e a condutividade térmica do material de 50 W/(mK), calcule a taxa de transferência de calor na superfície isotérmica (T_s), por unidade de comprimento normal à página.



Node	T_i ($^\circ\text{C}$)
1	120.55
2	120.64
3	121.29
4	123.89
5	134.57
6	150.49
7	147.14

Exemplo

Seja o canal quadrado mostrado na figura, operando sob condições de regime estacionário. A superfície interna do canal está a uma temperatura uniforme de 600 K, enquanto a superfície externa está exposta à troca de calor por convecção com um fluido a 300 K e um coeficiente convectivo de 50 W/(m² K). Com base em um elemento simétrico do canal, foi construída uma malha bidimensional e identificados os seus nós. As temperaturas nos nós 1, 3, 6, 8 e 9 são fornecidas.

- Partindo de volumes de controle apropriadamente definidos, deduza as equações de diferenças finitas para os nós 2, 4 e 7 e determine as temperaturas T_2 , T_4 e T_1 (K).
- Calcule a taxa de perda de calor por unidade de comprimento do canal.

