



Condução com geração de energia térmica

Prof. Alexei Essiptchouk

**Dep. Engenharia Ambiental
Instituto de Ciência e Tecnologia
Universidade Estadual Paulista
“Júlio de Mesquita Filho”**

Geração de energia térmica

- Energia elétrica (passagem da corrente)
- Absorção de partículas energéticas (nêutrons em reatores nucleares)
- Absorção de radiação eletromagnética (raios gama em reatores nucleares)
- Reações químicas
 - Exotérmicas (fontes de calor)
 - Endotérmicas (sumidouro de calor)

Taxa de geração de energia térmica, W: $\dot{E}_g = I^2 R$

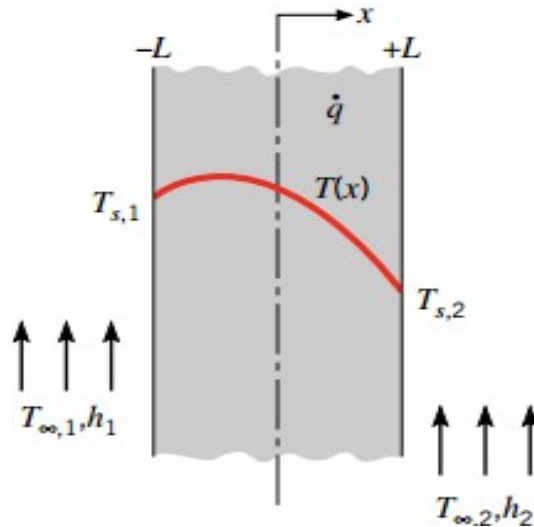
Caso geração uniforme em volume

A taxa volumétrica de geração, W/m³: $\dot{q} \equiv \frac{\dot{E}_g}{V} = \frac{I^2 R}{V}$

Parede plana

Consideramos a existência de uma fonte de geração de energia (calor) com uma **taxa volumétrica uniforme** $\dot{q}$ enquanto as superfícies mantidos a temperaturas $T_{s,1}$ e $T_{s,2}$.

Supondo o regime regular.



$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

Solução geral: $T(x) = -\frac{\dot{q}}{2k} x^2 + C_1 x + C_2$

Condições de contorno: $T(-L) = T_{s,1}$ $T(L) = T_{s,2}$

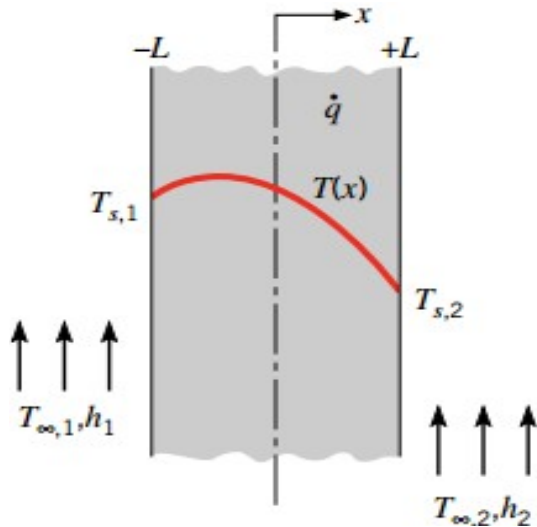
$$C_1 = \frac{(T_{s,2} - T_{s,1})}{2L} \quad C_2 = \frac{\dot{q}}{2k} L^2 + \frac{(T_{s,1} + T_{s,2})}{2}$$

$$T(x) = \frac{\dot{q} L^2}{2k} \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right) + \frac{(T_{s,2} - T_{s,1})}{2} \frac{x}{L} + \frac{(T_{s,1} + T_{s,2})}{2}$$

Observação: Com geração de calor, o fluxo térmico depende do x

Parede plana

Consideramos a existência de uma fonte de geração de energia (calor) com uma **taxa volumétrica uniforme** $\dot{q}$ enquanto as superfícies mantidos a temperaturas $T_{s,1}$ e $T_{s,2}$.
Supondo o regime regular.



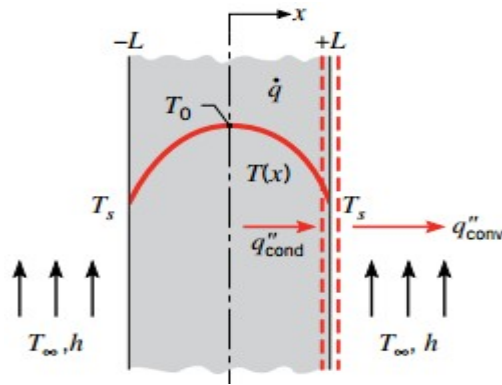
$$T(x) = \frac{\dot{q} L^2}{2k} \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right) + \frac{(T_{s,2} - T_{s,1})}{2} \frac{x}{L} + \frac{(T_{s,1} + T_{s,2})}{2}$$

$$\frac{dT(x)}{dx} = -\frac{\dot{q}}{k} x + \frac{(T_{s,2} - T_{s,1})}{2L}$$

$$q(x) = -k A \frac{dT(x)}{dx} = A \left(\dot{q} x - \frac{k}{2L} (T_{s,2} - T_{s,1}) \right)$$

Parede plana

Caso: ambas as superfícies são mantidas a uma temperatura $T_{s,1} = T_{s,2} = T_s$.



$$T(x) = \frac{\dot{q} L^2}{2k} \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right) + \frac{(T_{s,2} - T_{s,1})}{2} \frac{x}{L} + \frac{(T_{s,1} + T_{s,2})}{2}$$

Solução simétrica

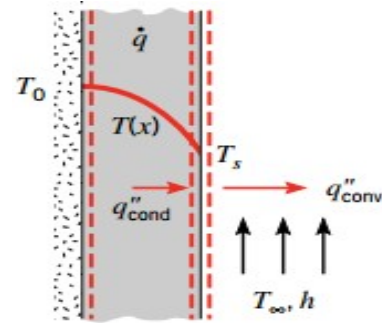
$$T(x) = \frac{\dot{q} L^2}{2k} \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right) + T_s \quad q''(x) = -k \frac{dT(x)}{dx} = \dot{q} x$$

Temperatura máxima ocorre no plano intermediário, $x=0$

$$T(0) = T_0 = \frac{\dot{q} L^2}{2k} + T_s$$

Modo alternativo para descrever a distribuição $T(x)$

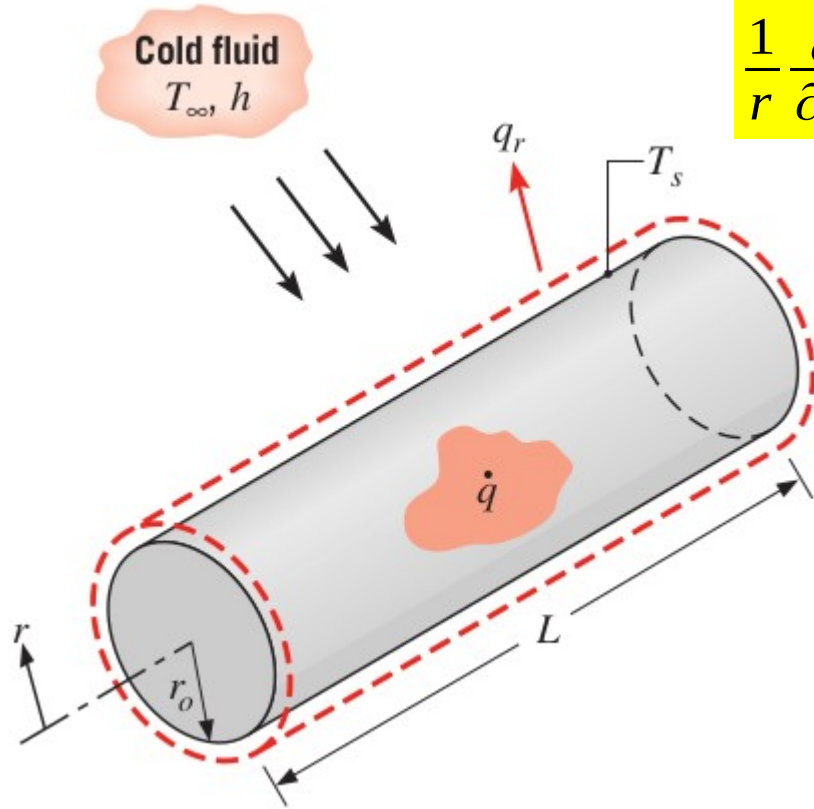
$$\frac{T(x) - T_0}{T_s - T_0} = \left(\frac{x}{L} \right)^2$$



Observa-se que $\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0$ e pode ser representada pela superfície adiabática

Sistemas radiais

Cilindro sólido. Fio condutor de corrente elétrica



$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Para regime estacionário e $k = \text{const}$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

Integrando

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}}{2k} r^2 + C_1$$

$$T(r) = -\frac{\dot{q}}{4k} r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

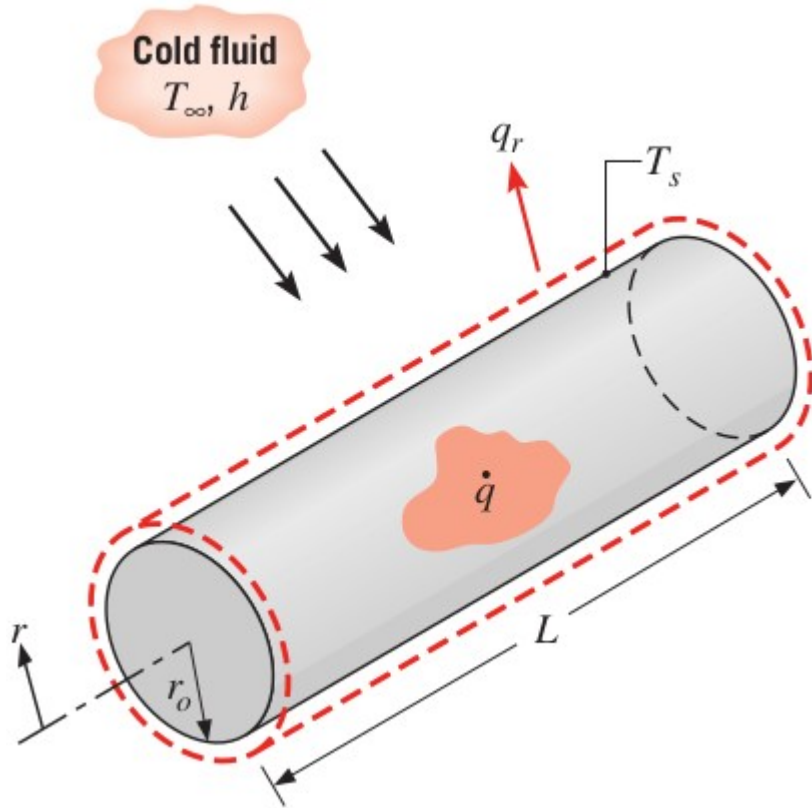
Condições contornos

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0$$

$$T(r_o) = T_s$$

Sistemas radiais

Cilindro sólido. Fio condutor de corrente elétrica



$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad \rightarrow \quad r \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}}{2k} r^2 + C_1$$

$$C_1 = 0$$

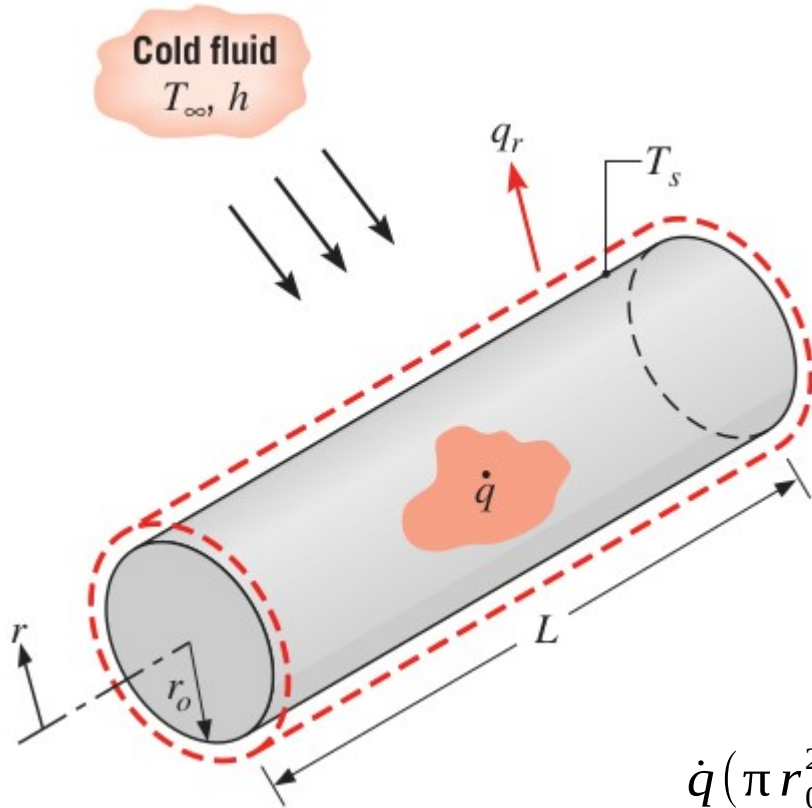
$$T(r_0) = T_s \quad \rightarrow \quad C_2 = T_s + \frac{\dot{q}}{4k} r_0^2$$

Distribuição da temperatura

$$T(r) = \frac{\dot{q} r_0}{4k} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) + T_s$$

Sistemas radiais

Cilindro sólido. Fio condutor de corrente elétrica



Temperatura no centro do cilindro $r = 0$

$$T(r=0) = T_0 = \frac{\dot{q} r_0}{4k} + T_s$$

$$T(r) = \frac{\dot{q} r_0}{4k} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) + T_s$$

$$\frac{T(r) - T_s}{T_0 - T_s} = 1 - \frac{r^2}{r_0^2}$$

Relacionamos T_s com T_∞ usando a taxa de fluxo de calor na superfície

$$\dot{q}(\pi r_0^2 L) = h(2\pi r_0 L)(T_s - T_\infty)$$

$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{q} r_0}{2h}$$

Problema

Uma corrente elétrica de 700 A passa em um cabo de aço inoxidável com diâmetro de 5 mm e resistência elétrica de $6 \times 10^{-4} \Omega/\text{m}$ (isto é, por metro de comprimento de cabo). O cabo está em um ambiente com temperatura de 30 C, e o coeficiente total associado à convecção e radiação entre o cabo e a vizinhança é de aproximadamente $25 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$.

- a) Se o cabo estiver desencapado, qual será a temperatura na sua superfície?
- b) Se um revestimento muito fino de um isolante elétrico for aplicado sobre o cabo, com uma resistência de contato de $0,02 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W}$, quais serão as temperaturas das superfícies do isolamento e do cabo?
- c) Há alguma preocupação sobre a capacidade do isolamento em suportar temperaturas elevadas. Qual espessura dessa isolação ($k = 0,5 \text{ W/m} \cdot \text{K}$) produzirá o menor valor da temperatura máxima no isolante? Qual será o valor da temperatura máxima quando esta espessura for usada?

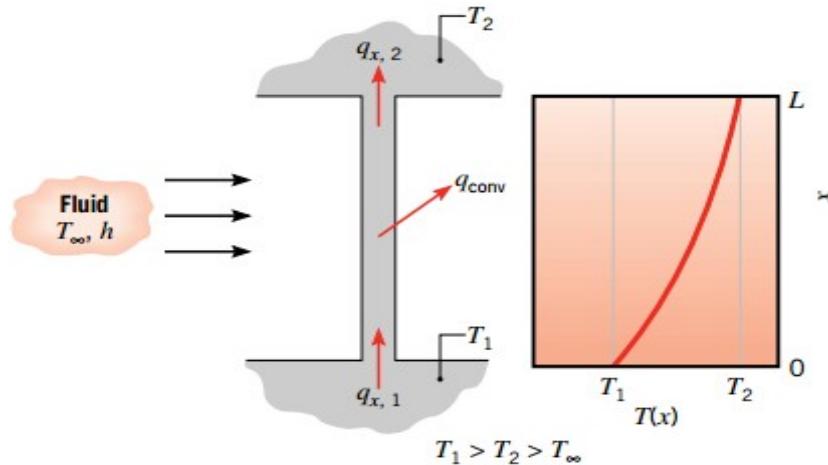
Transferência de calor nas superfícies estendidas

Superfície estendida

Superfície estendida – envolve transferência de calor por condução no interior de um sólido e a transferência de calor por convecção e/ou radiação nas fronteiras do sólido.

Caso $T_1 = \text{const}$, $T_2 = \text{const}$ e $T_1 > T_2$

Com aumento de x se aumenta q_{conv} que diminui q_x e consequentemente gradiente da temperatura dT/dx



Aletas

Aleta – superfície estendida usada especificamente para aumentar a taxa de transferência de calor

Como aumentar a taxa de transferência de calor?

Aumento do coeficiente convectivo h através do:

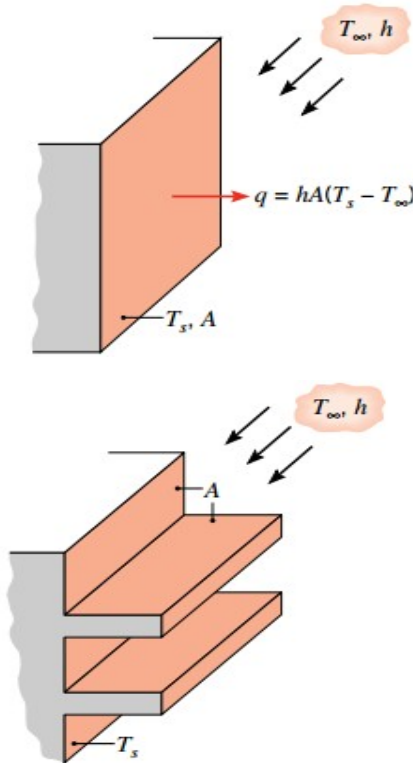
- *aumento da velocidade de fluxo*
- *diminuição da temperatura do fluido.*

Limitações:

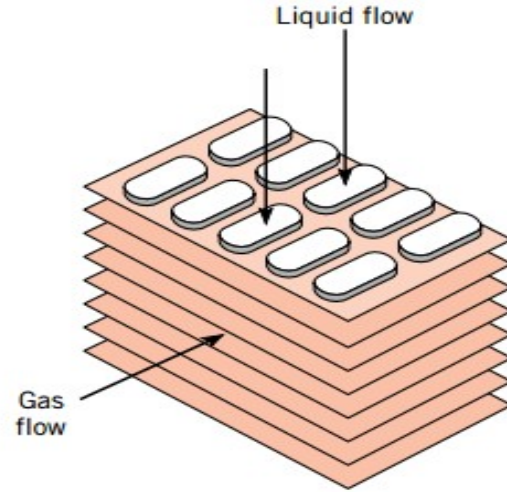
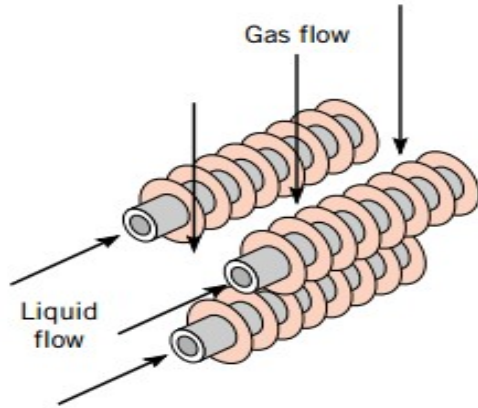
- Aumento insuficiente de h
- Custos associados altos no aumento da potencia dos sopradores ou bombas (aumento da velocidade)
- Frequentemente a redução do T_∞ é impraticável

- *aumento da superfície de troca de calor*

Aletas se estendem da parede para interior do fluido adjacente aumentando a área de transferência de calor.

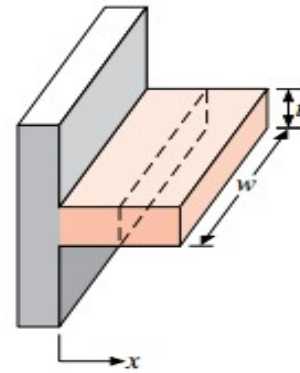


Aletas

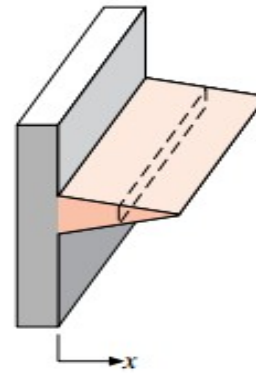


Esquemas típicos de trocadores de calor

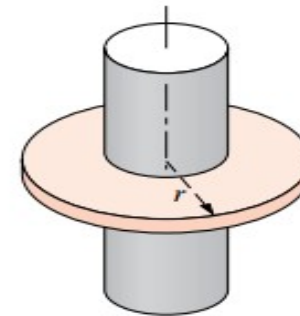
Configurações de aletas



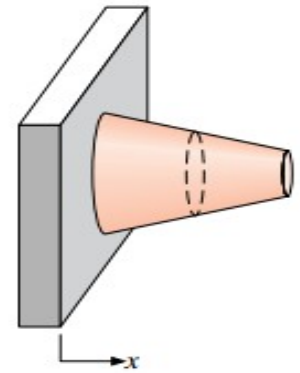
Aleta plana com
seção transversal
uniforme



Aleta plana com seção
transversal não
uniforme



Aleta anular



Aleta piniforme

Analise geral

Conservação da energia no volume de controle destacado

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{conv}$$

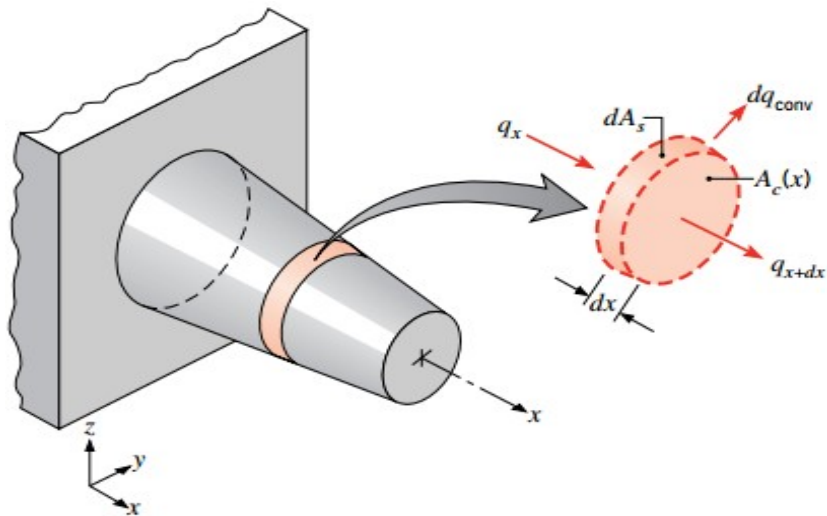
Área transversal varia com x , $f(x)$

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx} dx$$

$$q_{x+dx} = -k A_{tr} \frac{dT}{dx} - k \frac{d}{dx} \left(A_{tr} \frac{dT}{dx} \right) dx$$

$$\frac{d}{dx} \left(A_{tr} \frac{dT}{dx} \right) dx - \frac{h}{k} \frac{dA_s}{dx} dx (T - T_\infty) = 0$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \left(\frac{1}{A_{tr}} \frac{dA_{tr}}{dx} \right) \frac{dT}{dx} - \left(\frac{1}{A_{tr}} \frac{h}{k} \frac{dA_s}{dx} \right) (T - T_\infty) = 0$$



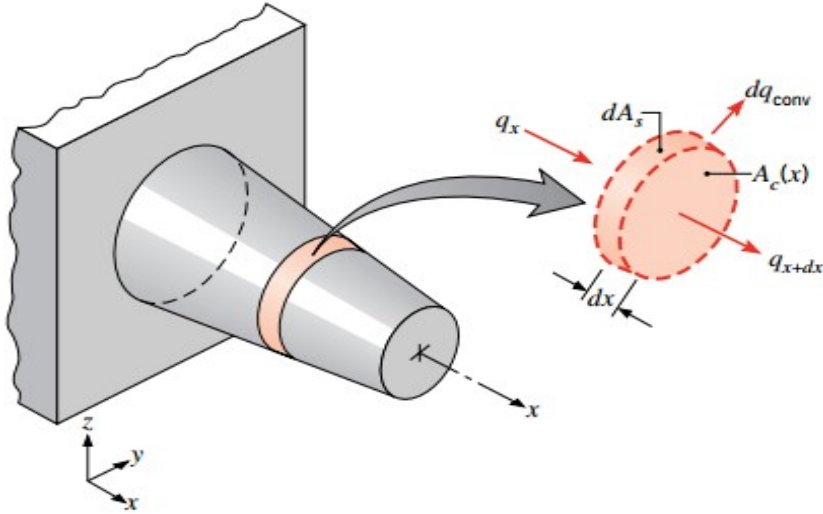
Condução

$$q_x = -k A_{tr} \frac{dT}{dx}$$

Convecção

$$dq_{conv} = h dA_s (T - T_\infty)$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \left(\frac{1}{A_{tr}} \frac{dA_{tr}}{dx} \right) \frac{dT}{dx} - \left(\frac{1}{A_{tr}} \frac{h}{k} \frac{dA_s}{dx} \right) (T - T_\infty) = 0$$



Caso: $A_{tr} = \text{const}$ $A_s = Px$

$$\frac{dA_{tr}}{dx} = 0 \quad \frac{dA_s}{dx} = P$$

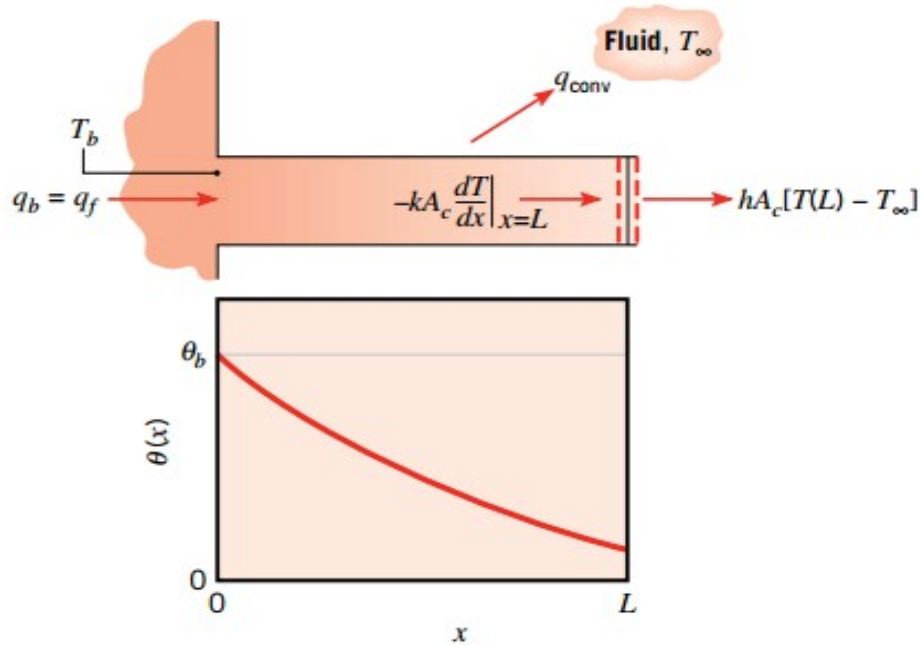
$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{hP}{kA_{tr}} (T - T_\infty) = 0$$

Para simplificar, introduzimos o excesso de temperatura $\theta \equiv T - T_\infty$

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - m^2 \theta = 0$$

$$m^2 \equiv \frac{hP}{kA_{tr}}$$

Solução geral $\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$



$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

$$\begin{cases} \text{CC1} & \theta_b = C_1 + C_2 \\ \text{CC2} & h(C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL}) = km(-C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL}) \end{cases}$$

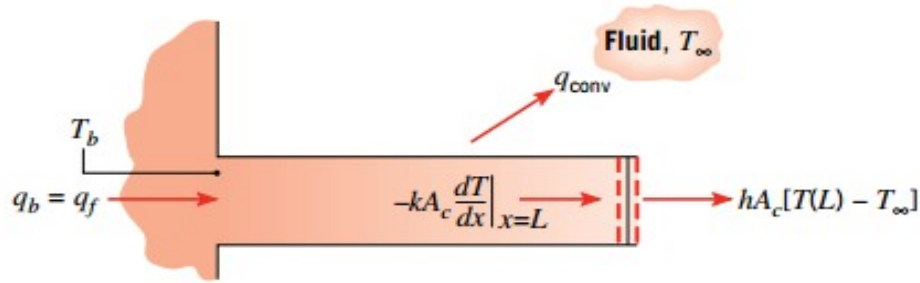
Introduzimos as condições de contorno
CC1: temperatura na base da aleta

$$\theta(0) = T(b) - T_\infty = \theta_b$$

CC2: Transferência de calor por convecção na extremidade

$$h A_{tr} (T(L) - T_\infty) = -k A_{tr} \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L}$$

$$h \theta|_{x=L} = -k \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L}$$

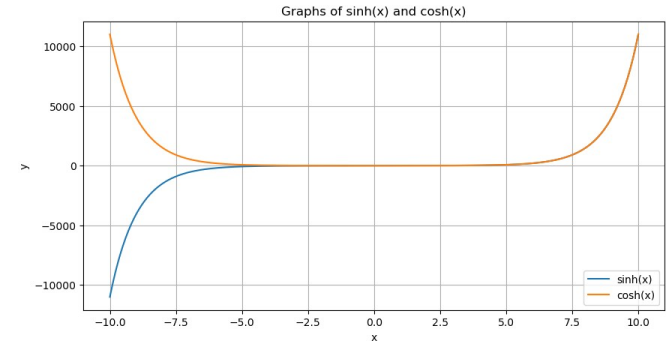


$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L-x) + \frac{h}{mk} \sinh m(L-x)}{\cosh mL + \frac{h}{mk} \sinh mL}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

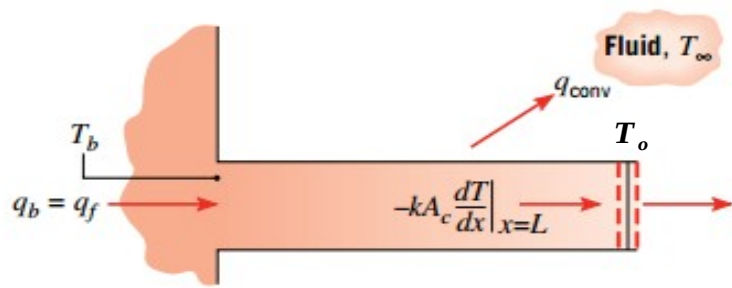
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



$$q_f = -k A_{tr} \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = -k A_{tr} \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0}$$

$$q_f = \sqrt{hPkA_{tr}} \theta_b \frac{\sinh mL + h/mk \cosh mL}{\cosh mL + h/mk \sinh mL}$$

Problema



Obter a equação da aleta aplicando seguintes condições contornos

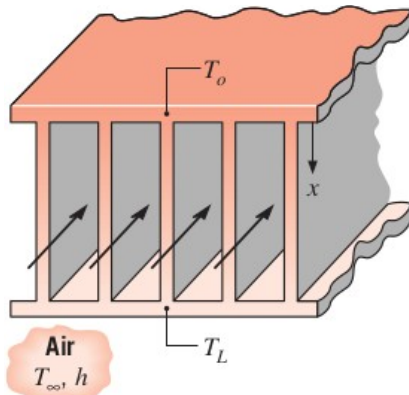
CC1: Temperatura na base da aleta

$$T(0) = T_b$$

CC2: Temperatura na extremidade

$$T(L) = T_o$$

Um exemplo do sistema



$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

Resumo das soluções

CC1: temperatura na base da aleta

$$\theta(0) = T(b) - T_{\infty} = \theta_b$$

CC2.1: Transferência de calor por convecção na extremidade

$$h\theta = -k \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L}$$

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L-x) + (h/mk) \sinh m(L-x)}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL}$$

CC2.2: Extremidade adiabática $\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = 0$

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}$$

CC2.3: Temperatura predeterminada

$$\theta(L) = \theta_L$$

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{(\theta_L/\theta_b) \sinh mx + \sinh m(L-x)}{\sinh mL}$$

CC2.4: Aleta muito longa

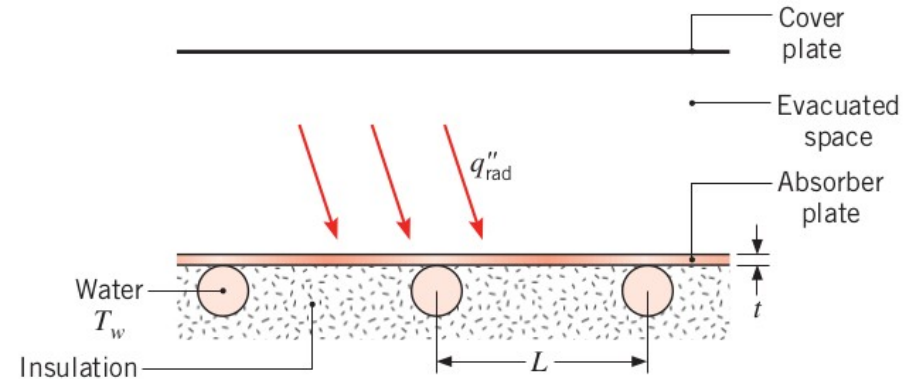
$$L \rightarrow \infty, \quad \theta_L \rightarrow 0$$

$$\frac{\theta}{\theta_b} = e^{-mx}$$

$$q_f = \sqrt{hPkA_c} \theta_b$$

Exemplo

Tubos de cobre estão fixados à placa absorvedora de um coletor solar plano. A placa absorvedora feita com a liga de alumínio (2024-T6, $k=180 \text{ W/m}^2\text{K}$) possui 6 mm de espessura e está bem isolada termicamente na sua superfície inferior. Há vácuo no espaço que separa a superfície superior da placa e a placa de cobertura transparente. Os tubos encontram-se espaçados entre si por uma distância L de 0,20 m, e água escoa nos tubos para remover a energia coletada. A água pode ser considerada a uma temperatura uniforme $T = 60^\circ\text{C}$.



Em condições de operação em regime estacionário, nas quais o fluxo radiante líquido na superfície absorvedora é de $q''_{\text{rad}} = 800 \text{ W/m}^2$, quais são a temperatura máxima na placa e a taxa de transferência de calor para a água por unidade de comprimento do tubo? Note que q''_{rad} representa o efeito líquido da absorção da radiação solar pela placa absorvedora e da troca de radiação entre a placa absorvedora e a placa de cobertura. Você pode supor que a temperatura da placa absorvedora exatamente acima de um tubo seja igual à da água.

Outras aplicações: biocalor

Biocalor – geração de calor em tecidos vivos

- Geração de calor metabólica $\dot{q}_m$
- Troca de calor entre o sangue em escoamento e o tecido circundante (perfusão) $\dot{q}_p$

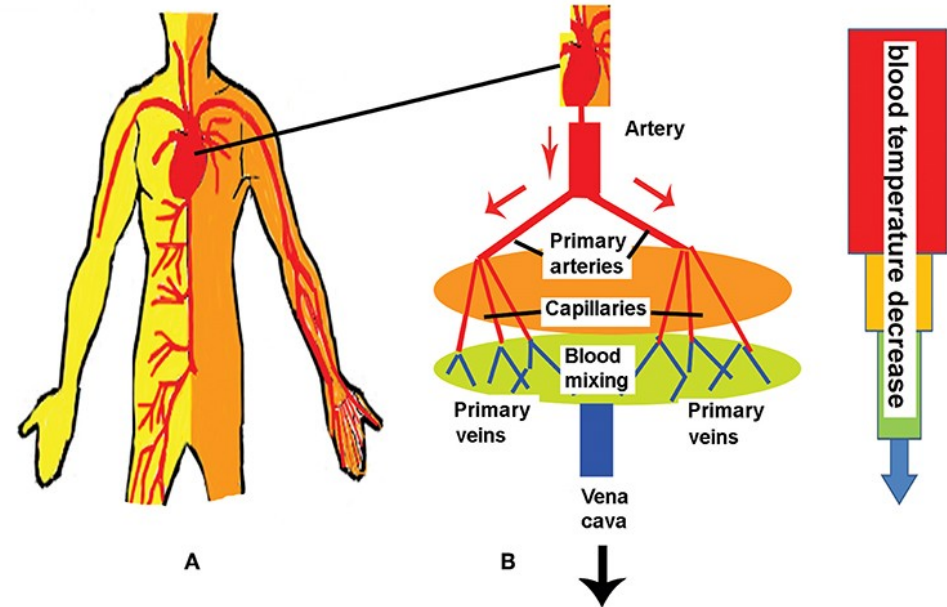
$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{q}_m + \dot{q}_p}{k} = 0$$

$$\dot{q}_p = \omega \rho_s c_s (T_a - T)$$

ω – taxa de perfusão, m^3/s , escoamento volumétrico de sangue por m^3 de tecido

ρ_s, c_s – massa específica e calor específico do tecido

$\omega \rho_s$ – vazão mássica de sangue por unidade de volume do tecido



Outras aplicações: biocalor

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{q}_m + \omega \rho_s c_s (T_a - T)}{k} = 0$$

Definindo o excesso da temperatura

$$\theta \equiv T - T_a - \frac{\dot{q}_m}{\omega \rho_s c_s}$$

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \tilde{m}^2 \theta = 0$$

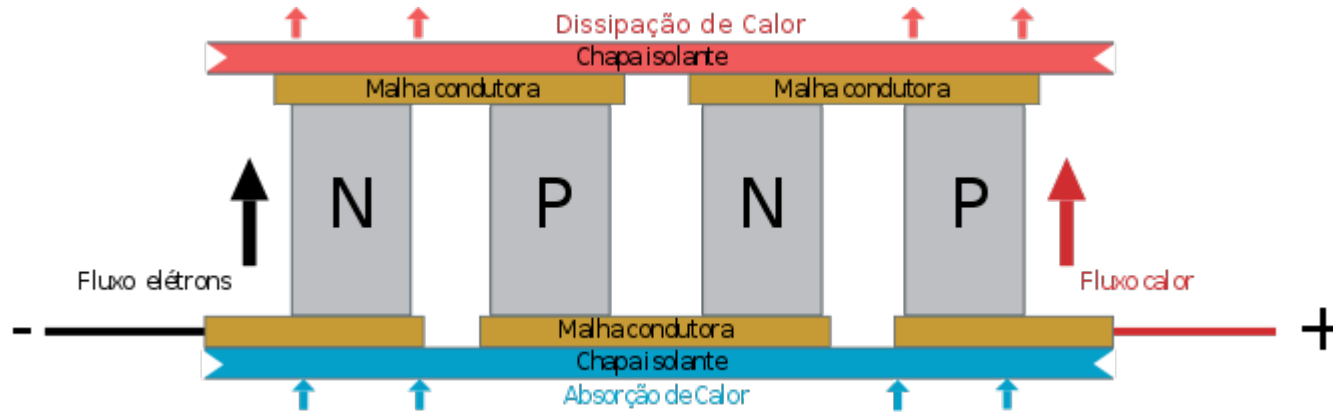
Onde

$$\tilde{m}^2 = \frac{\omega \rho_s c_s}{k}$$

Outras aplicações: termoeétrica

Efeito *Seebeck*: quando um gradiente de temperatura é estabelecido no interior de um material, um gradiente de voltagem correspondente é induzido

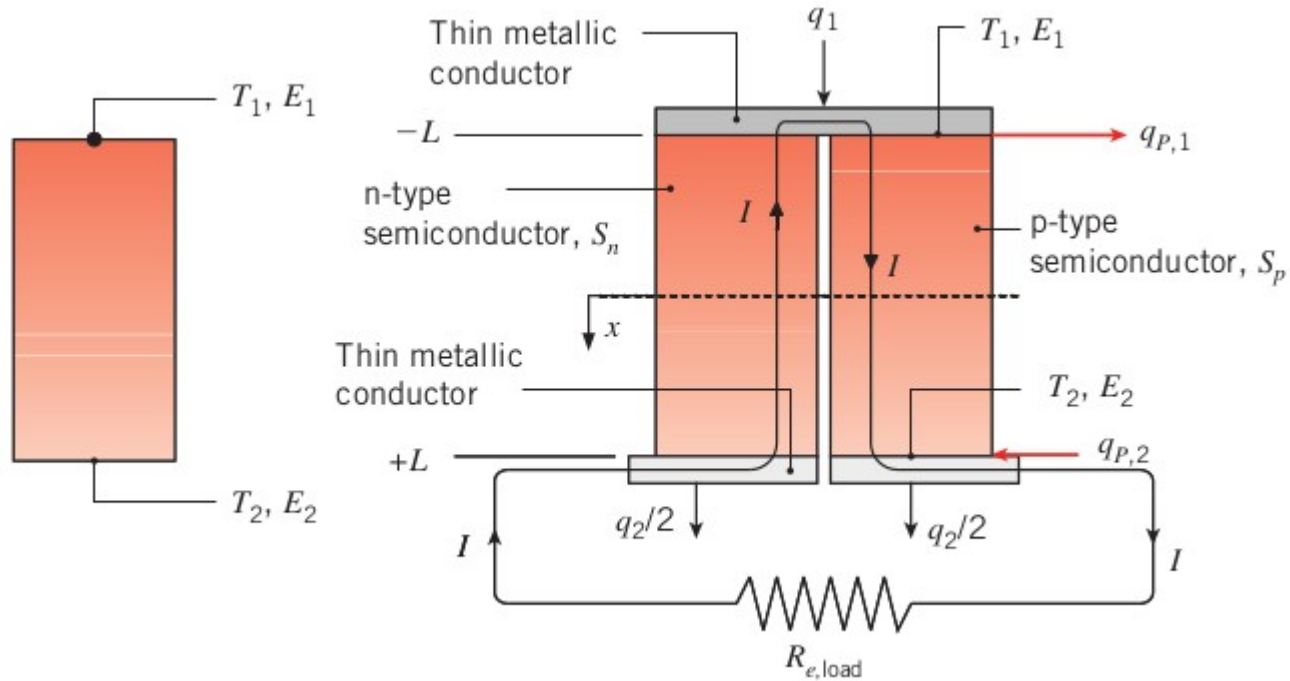
Efeito de *Peltier*: é a produção de um gradiente de temperatura (fluxo de calor, geração ou absorção) em duas junções de dois condutores (ou semicondutores) de materiais diferentes quando submetidos a uma tensão elétrica em um circuito fechado



A absorção de calor é positiva (geração é negativa) quando a corrente elétrica escoa do semicondutor tipo-n para o tipo-p.

$$q_p = I (S_p - S_n) T = I S_{p-n} T$$

Outras aplicações: termoeétrica



$$q_p = I(S_p - S_n)T = I S_{p-n} T$$

Outras aplicações: termoeletrônica

O fluxo térmico com presença de fontes de calor

$$q(x) = -k A \frac{dT(x)}{dx} = A \left(\dot{q} x - \frac{k}{2L} (T_{s,2} - T_{s,1}) \right)$$

A taxa volumétrica de geração de calor (efeito Joule)

$$\dot{q} = \frac{I^2 R}{V} = \frac{I^2}{A 2L} \frac{\rho 2L}{A} = \frac{I^2 \rho}{A^2}$$

$$q_p = I(S_p - S_n)T = I S_{p-n} T$$

$$q(x=L) = 2A \left(\frac{k}{2L} (T_1 - T_2) + \frac{I^2 \rho L}{A^2} \right) + I S_{p-n} T_1$$

$$q(x=-L) = 2A \left(\frac{k}{2L} (T_1 - T_2) - \frac{I^2 \rho L}{A^2} \right) + I S_{p-n} T_2$$

A potência elétrica produzida

$$P = q_{gerada} - q_{consumida}$$

$$P = q(x=-L) - q(x=L)$$

$$P = I S_{p-n} (T_1 - T_2) - 4 \frac{I^2 \rho L}{A}$$

$$P = I S_{p-n} (T_1 - T_2) - I^2 R_{tot}$$

$$R_{tot} = 2R$$