



Condução térmica

Prof. Alexei Essiptchouk

**Dep. Engenharia Ambiental
Instituto de Ciência e Tecnologia
Universidade Estadual Paulista
“Júlio de Mesquita Filho”**

Condução térmica em regime permanente

Parede plana

Condução em regime permanente

Parede plana

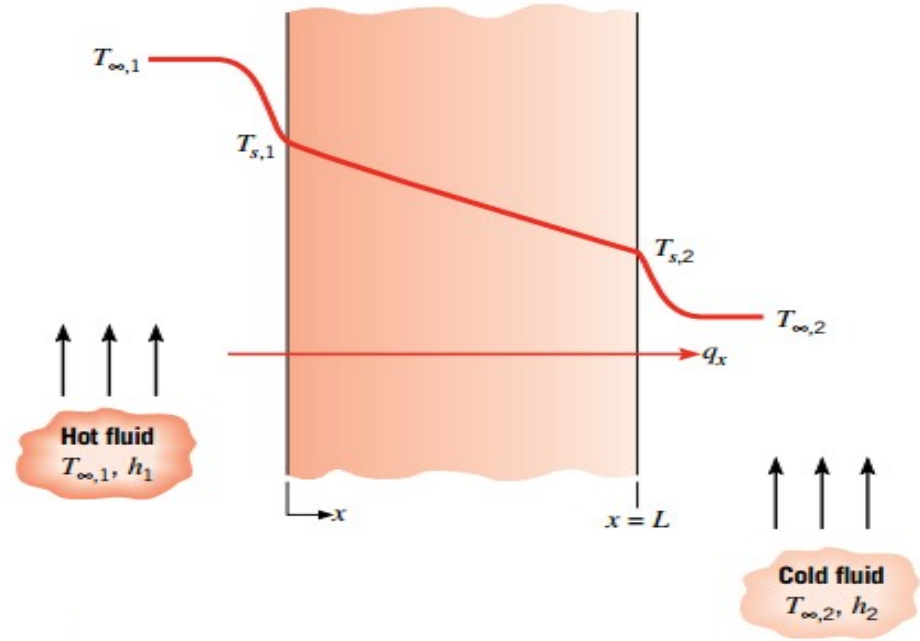
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$

$$q_x'' = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{Fluxo térmico é independente do } x$$

$$T(x) = C_1 x + C_2$$

Para obter C_1 e C_2 aplicam CC para $x = 0$ e $x = L$

$$T(0) = T_{s,1} \quad T(L) = T_{s,2}$$

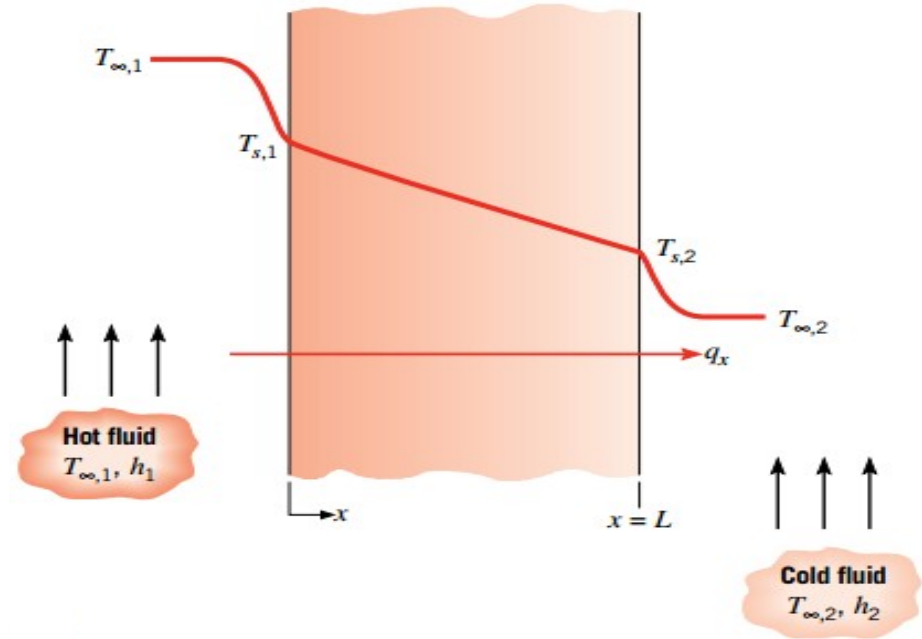


$$\begin{cases} T(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 = T_{s,1} & \rightarrow C_2 = T_{s,1} \\ T(L) = C_1 L + T_{s,1} = T_{s,2} & \rightarrow C_1 = \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{L} \end{cases} \quad \rightarrow \quad T(x) = (T_{s,2} - T_{s,1}) \frac{x}{L} + T_{s,1}$$

Condução em regime permanente

$$T(x) = (T_{s,2} - T_{s,1}) \frac{x}{L} + T_{s,1}$$

Para condução unidimensional em regime permanente em uma parede plana sem geração da energia e com condutividade térmica constante, **a temperatura varia linearmente com x**



Fluxo térmico, W/m^2

$$q_x'' = -k \frac{\partial T}{\partial x} = k \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{L}$$

Taxa de calor por condução, W

$$q_x = q_x'' A = k A \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{L}$$

Resistência térmica

Resistência térmica por **condução**: Parede plana

$$q_x = q_x'' A = \frac{k}{L} A (T_{s,1} - T_{s,2})$$

Similar à resistência elétrica

$$R_{el} \equiv \frac{\psi_{s,1} - \psi_{s,2}}{I} = \frac{L}{\sigma A} \quad \longleftrightarrow \quad R_{t,cond} \equiv \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{q_x} = \frac{L}{kA}$$

Resistência térmica por **convecção**

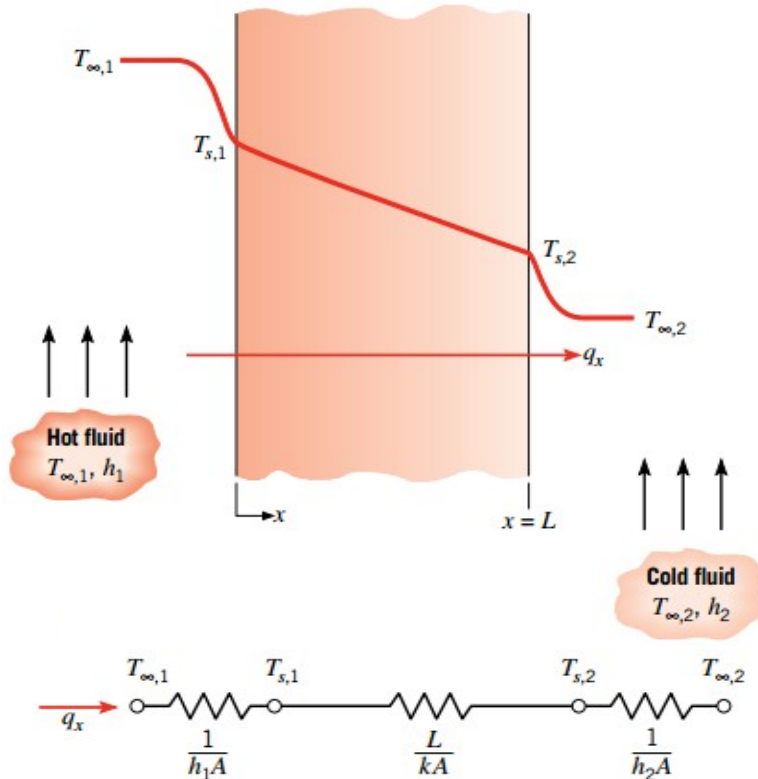
$$q_x = h A (T_s - T_\infty)$$

$$R_{t,conv} \equiv \frac{T_s - T_\infty}{q} = \frac{1}{hA}$$

Resistência térmica por **radiação**

$$R_{t,rad} \equiv \frac{T_s - T_{sur}}{q_{rad}} = \frac{1}{h_{rad} A}$$

Resistência térmica: parede plana



A taxa de transferência de calor

$$q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{s,1}}{\frac{1}{h_1 A}} = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\frac{L}{kA}} = \frac{T_{s,2} - T_{\infty,2}}{\frac{1}{h_2 A}}$$

A resistência térmica total

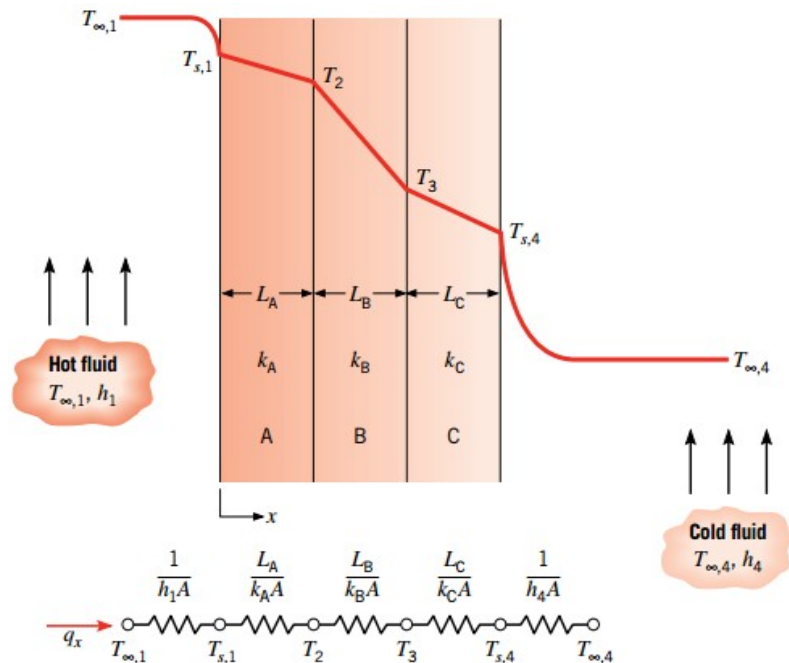
$$R_{tot} = \frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{k A} + \frac{1}{h_2 A}$$

$$q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,2}}{R_{tot}}$$

A temperatura é análogo do potencial elétrico.

A taxa de transferência de calor é análogo do corrente elétrica

Resistência térmica: parede composta



A taxa de transferência de calor

$$q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{R_{tot}}$$

A resistência térmica total

$$R_{tot} = \frac{1}{h_1 A} + \frac{L_A}{k_A A} + \frac{L_B}{k_B A} + \frac{L_C}{k_C A} + \frac{1}{h_4 A}$$

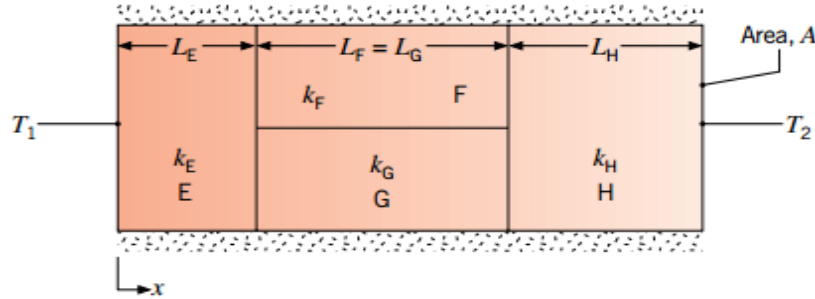
$$q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{s,1}}{\frac{1}{h_1 A}} = \frac{T_{s,1} - T_2}{\frac{L_A}{k_A A}} = \frac{T_{s,4} - T_{\infty,4}}{\frac{1}{h_4 A}}$$

Coeficiente global de transferência de calor, U

$$q_x \equiv U A \Delta T$$

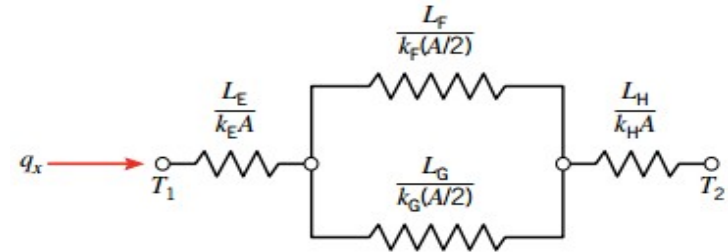
$$U = \frac{1}{R_{tot} A} = \frac{1}{1/h_1 + L_A/k_A + L_B/k_B + L_C/k_C + 1/h_4}$$

Resistência térmica: parede composta

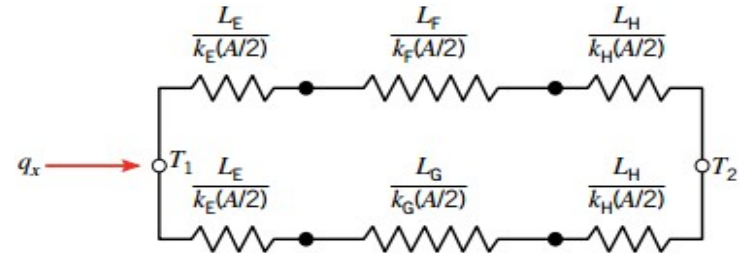


Paredes compostas podem ser caracterizadas por configurações série-paralelo transformando 2D em 1D.

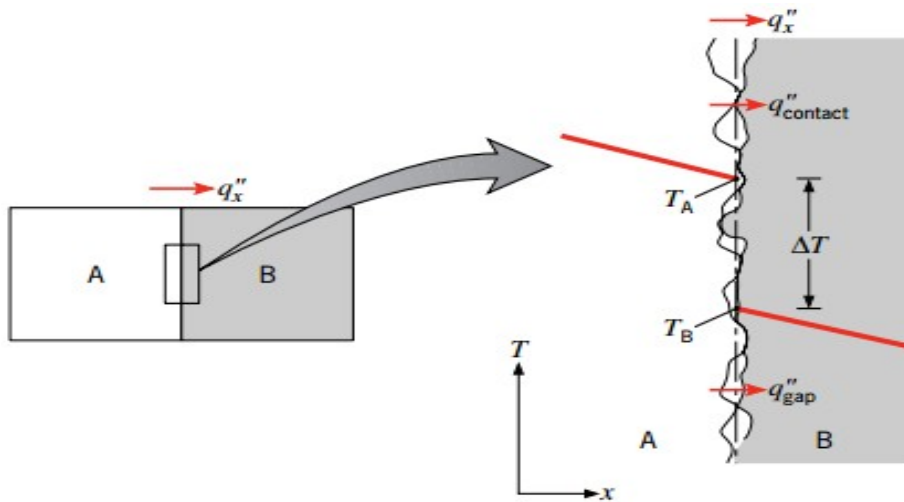
Caso: As superfícies normais à direção x são isotérmicas



Caso: As superfícies paralelas à direção x são adiabáticas



Resistência de contato



Ocorre devido aos efeitos da rugosidade da superfície.

A transferência de calor é devido a condução através da área de contato real e da condução/radiação através dos interstícios

Os resultados mais confiáveis da resistência de contato são aqueles obtidos experimentalmente.

Thermal Resistance, $R''_{t,c} \times 10^4 \text{ (m}^2 \cdot \text{K/W)}$

(a) Vacuum Interface

Contact pressure	100 kN/m ²	10,000 kN/m ²
Stainless steel	6–25	0.7–4.0
Copper	1–10	0.1–0.5
Magnesium	1.5–3.5	0.2–0.4
Aluminum	1.5–5.0	0.2–0.4

(b) Interfacial Fluid

Air	2.75
Helium	1.05
Hydrogen	0.720
Silicone oil	0.525
Glycerine	0.265

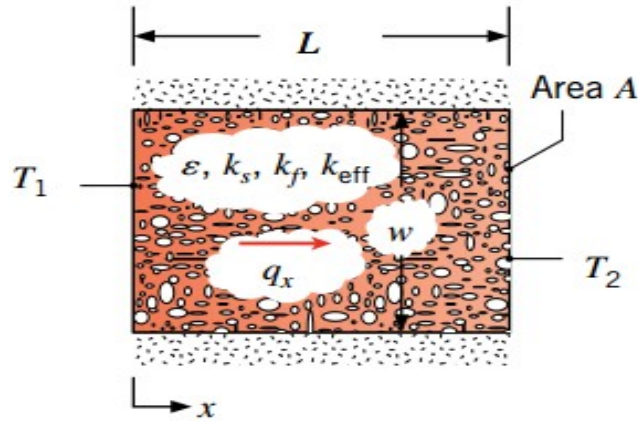
$$R_{t,cont} = \frac{(T_A - T_B)}{q''_x}$$

Interfaces metálicas sob condição de vácuo

Interfaces de alumínio, rugosidade 10 μm, 10⁵ N/m², com diferentes fluidos interfaciais

Meios porosos

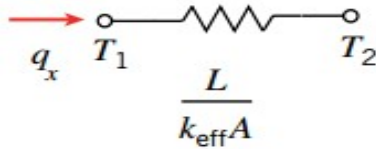
Meios porosos – combinação de um sólido estacionário com um fluido



A taxa de transferência de calor

$$q_x = \frac{k_{ef} A}{L} (T_1 - T_2)$$

k_{ef} – condutividade térmica efetiva



Condutividade térmica efetiva depende da:

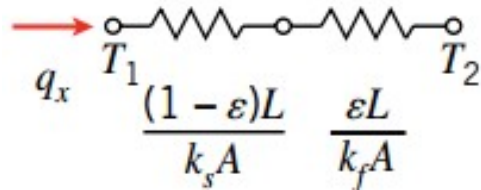
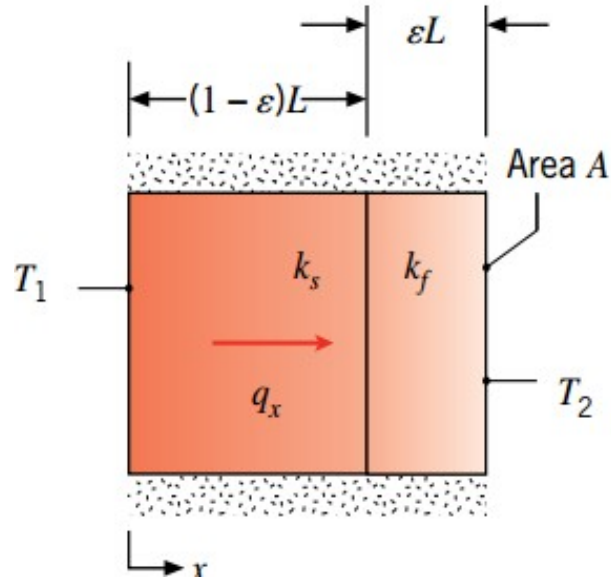
- Porosidade, $\epsilon = V_{\text{fluido}} / V_{\text{total}}$;
- Condutividades do sólido e fluido;
- Distribuição de tamanhos e forma de empacotamento das partículas individuais;
- Resistência de contato;
- Fenômenos em nanoescala.

Meios porosos: modos de modelamento

Parede equivalente em série. Comprimento da região fluida: εL

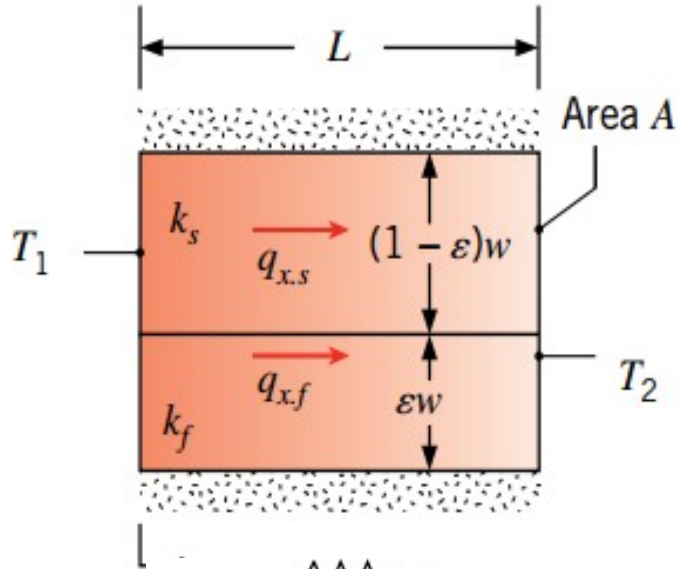
Região sólida: $(1-\varepsilon)L$

A taxa de transferência de calor



$$k_{ef.min} = \frac{1}{(1-\varepsilon)/k_s + \varepsilon/k_f}$$

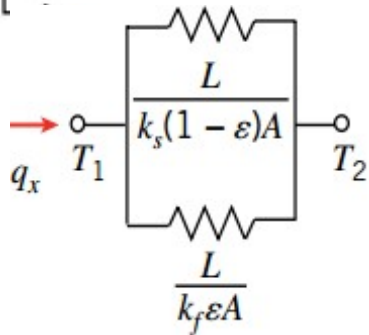
Meios porosos: modos de modelamento



Parede equivalente em paralelo. Largura da região fluida: εw

Largura sólida: $(1-\varepsilon)w$

$$k_{ef.\text{max}} = (1-\varepsilon)k_s + \varepsilon k_f$$



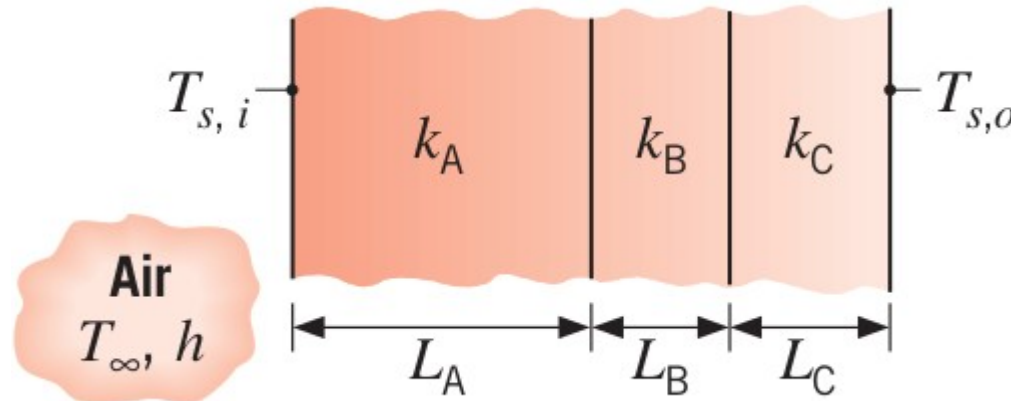
Ligação em série $\rightarrow$ a resistência térmica total é *maior*

Ligação em paralelo $\rightarrow$ a condutividade térmica efetiva é *mínima*

Problema

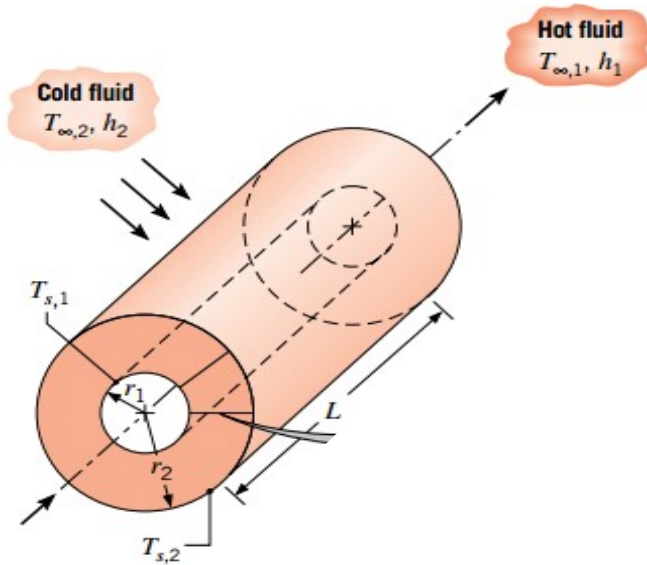
A parede composta de um forno possui três materiais, dois dos quais com condutividade térmica $k_A = 20 \text{ W/mK}$ e $k_C = 50 \text{ W/mK}$, e espessuras $L_A = 0,30 \text{ m}$ e $L_C = 0,15 \text{ m}$. O terceiro material, B, que se encontra entre os materiais A e C, possui espessura conhecida, $L_B = 0,15 \text{ m}$, mas a sua condutividade térmica k_B desconhecida.

Sob condições de operação em regime estacionário, medidas revelam uma temperatura na superfície externa de $T_{s,o} = 20 \text{ C}$, uma temperatura na superfície interna de $T_{s,i} = 600 \text{ C}$ e uma temperatura do ar no interior do forno de $T_\infty = 800 \text{ C}$. O coeficiente de convecção interno h é conhecido como $25 \text{ W/m}^2\text{K}$. Qual é o valor de k_B ?



Sistemas radiais

Sistemas cilíndricos e esféricos apresentam frequentemente gradientes de temperatura apenas na direção radial e podem ser tratados como unidimensionais.



$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Regime estacionário sem geração da energia

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$$

Distribuição radial da temperatura

$$T(r) = C_1 \ln(r) + C_2$$

A taxa de transferência de calor (**mas não é o fluxo!**) é independente do r

$$q_r = -k A \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) = -k (2\pi r L) \left(\frac{C_1}{r} \right) = -2\pi k L C_1$$

Sistemas radiais

Condições contornos:

$$T(r_1)=T_{s,1} \quad T(r_2)=T_{s,2} \quad T_{s,1} > T_{s,2}$$

A distribuição da temperatura

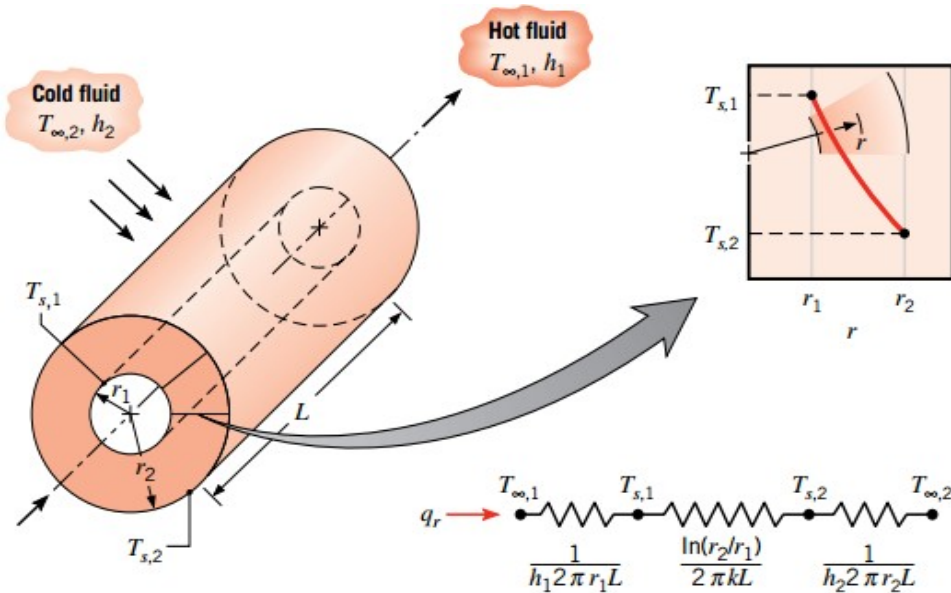
$$T(r) = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\ln(r_1/r_2)} \ln\left(\frac{r}{r_2}\right) + T_{s,2}$$

Taxa de transferência de calor

$$q_r = -k A \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{2\pi L k (T_{s,2} - T_{s,1})}{\ln(r_2/r_1)}$$

$$T(r) = C_1 \ln(r) + C_2$$

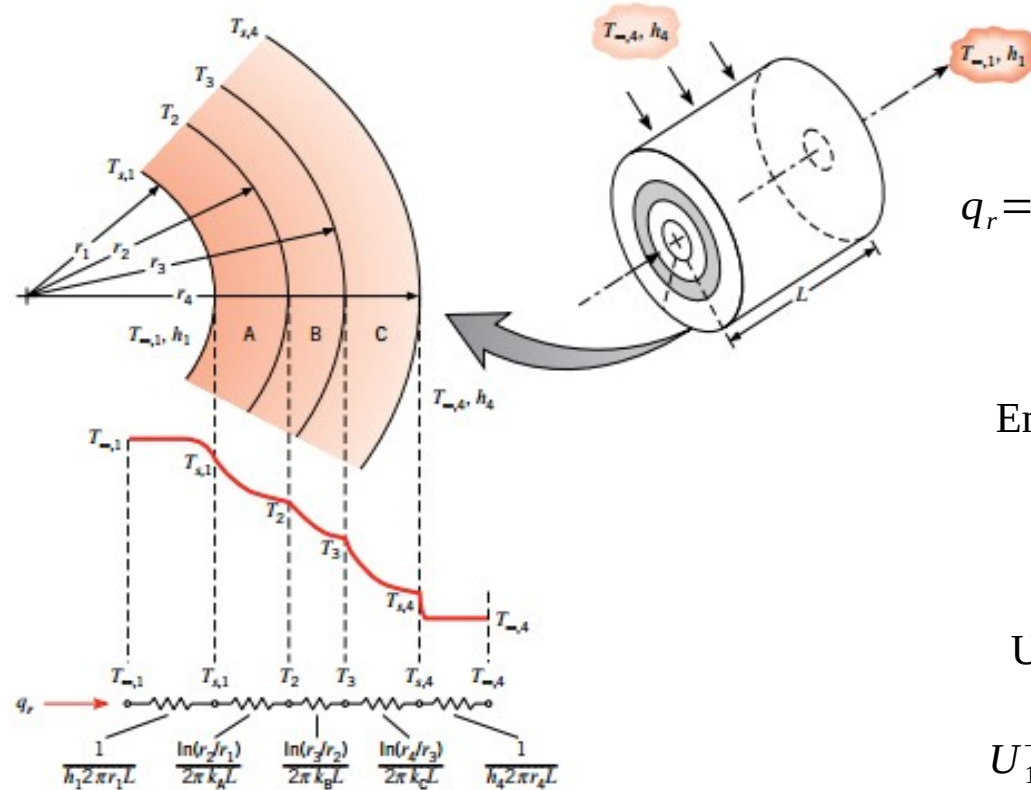
$$q_r = -2\pi k L C_1$$



A resistência térmica de parede cilíndrica

$$R_{t.cond} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L k} > 0$$

Sistema cilíndrico composto



$$q_r = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{\frac{1}{2\pi r_1 L h_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_A L} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi k_B L} + \frac{\ln(r_4/r_3)}{2\pi k_C L} + \frac{1}{2\pi r_4 L h_4}}$$

Em termos do coeficiente global de transferência de calor

$$q_r = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{R_{tot}} = U A (T_{\infty,1} - T_{\infty,4})$$

Utilizando a área interna como referência $A_1 = 2\pi r_1 L$

$$U_1^{-1} = R_{tot} A = \frac{1}{h_1} + \frac{r_1}{k_A} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{r_1}{k_B} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{r_1}{k_C} \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) + \frac{r_1}{r_4} \frac{1}{h_4}$$

$$U_1 A_1 = U_2 A_2 = U_3 A_3 = U_4 A_4 = \left(\sum R_t \right)^{-1} \quad 17/22$$



Abastecimento do ônibus espacial.

Determinar a espessura do isolamento ($k=0.02$ W/mK) para evitar a condensação na parte externa do isolamento, supondo $h_0 = h_{\text{conv}} + h_r = 17$ W/m²K

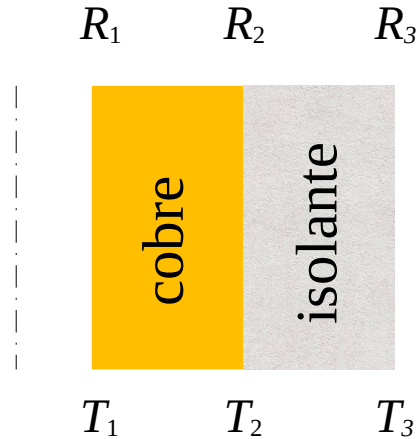


Tubo de cobre ($k_{\text{Cu}} = 400$ W/mK) com $D_{\text{in}} = 2$ cm $D_{\text{ext}} = 2.5$ cm carrega O_2 para local de armazenamento a $T = -183^\circ\text{C}$ e fluxo $Q=0.08$ m³/min.

Temperatura do ar ambiente $T_{\text{ar}}=21^\circ\text{C}$.

O ponto de orvalho $T_3=10^\circ\text{C}$





$$T_\infty = T_{ar}$$

$$\left\{ \begin{aligned} q_r &= \frac{\Delta T}{\sum R_i} = \frac{T_\infty - T_1}{\frac{\ln(D_2/D_1)}{2\pi L k_{Cu}} + \frac{\ln(D_3/D_2)}{2\pi L k_{iso}} + \frac{1}{\pi D_3 L h_0}} \\ q_r &= \frac{\Delta T}{\sum R_j} = \frac{T_\infty - T_3}{\frac{1}{\pi D_3 L h_0}} \end{aligned} \right.$$

$$T_1 = -183^\circ\text{C}$$

$$T_3 = 10^\circ\text{C}$$

$$T_\infty = T_{ar} = 21^\circ\text{C}$$

$$h_0 = h_{conv} + h_r = 17 \text{ W/m}^2\text{K}$$

CC:

$$-T(R_1) = T_1$$

$$\text{- convecção na } R_3 \quad -k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_3} = h [T_\infty - T_3]$$

$$\frac{T_\infty - T_1}{T_\infty - T_3} = \frac{\frac{\ln(D_2/D_1)}{2\pi L k_{Cu}} + \frac{\ln(D_3/D_2)}{2\pi L k_{iso}} + \frac{1}{\pi D_3 L h_0}}{\frac{1}{\pi D_3 L h_0}}$$

Aplicando iterações ou software obtemos valor de D_3



$$d_1 := .02$$

$$d_2 := .025$$

$$T_1 := -183$$

$$T_{ar} := 21$$

$$T_3 := 10$$

$$k_{Cu} := 400$$

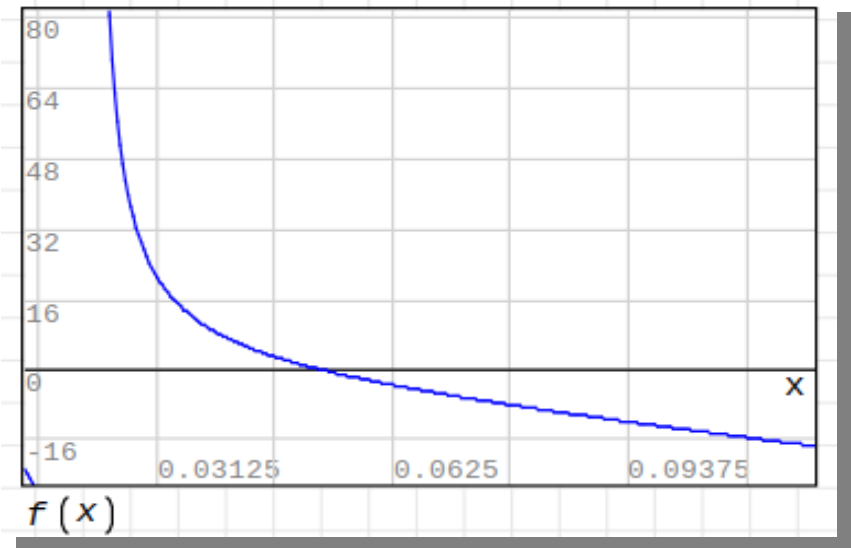
$$k_{iso} := 0.02$$

$$h_{\theta} := 17$$

$$f(d_3) := \frac{T_{ar} - T_1}{\frac{\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)}{2 \cdot k_{Cu}} + \frac{\ln\left(\frac{d_3}{d_2}\right)}{2 \cdot k_{iso}} + \frac{1}{h_{\theta} \cdot d_3}} - \frac{T_{ar} - T_3}{\frac{1}{h_{\theta} \cdot d_3}}$$

$$d_3 := \text{solve}(f(x), x, 0.025, 0.1) = 0.0538$$

$$\Delta := \frac{d_3 - d_2}{2} = 0.0144$$



Espessura do isolante 15 mm

Sistemas esféricos

Exige a condição $q_r = q_{r+dr}$ em condições de transferência de calor unidimensional

$$q_r = -k A \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) = -k (4 \pi r^2) \frac{\partial T}{\partial r}$$

$A = 4\pi r^2$ é a área normal à direção da transferência de calor.

Como q_r é uma constante

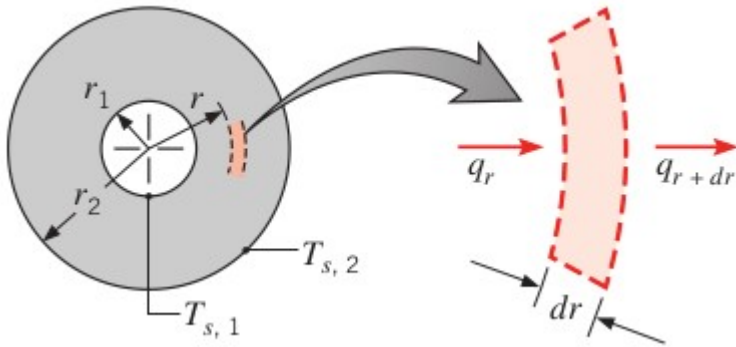
$$\frac{q_r}{4 \pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = - \int_{T_1}^{T_2} k(T) dT$$

Para $k = \text{Const}$

$$q_r = \frac{4 \pi k (T_1 - T_2)}{1/r_1 - 1/r_2}$$

Resistência térmica

$$R_t = \frac{1}{4 \pi k} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$



Problema

Uma técnica para destruir tecidos malignos envolve a inserção de uma pequena fonte de calor esférica, de raio r_0 , no interior do tecido e manutenção de temperaturas locais acima de um valor crítico T_c por um período prolongado. Pode-se considerar que o tecido que se encontra bem afastado da fonte de calor permaneça na temperatura normal do corpo ($T_{\text{corp}} = 37^\circ\text{C}$). Obtenha uma expressão geral para a distribuição radial de temperatura no tecido, em condições de regime estacionário, no qual há uma dissipação de calor a uma taxa q .

Se $r_0 = 0,5\text{ mm}$, qual a taxa de calor que deve ser fornecida para manter a temperatura do tecido de $T > T_c = 42^\circ\text{C}$ na região $0,5 \leq r \leq 5\text{ mm}$?

A condutividade térmica do tecido é de aproximadamente $0,5\text{ W/mK}$. Suponha perfusão insignificante.

	Parede Plana	Parede Cilíndrica ^a	Parede Esférica ^a
Equação de calor	$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$	$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$	$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0$
Distribuição de temperaturas	$T_{s,1} - \Delta T \frac{x}{L}$	$T_{s,2} + \Delta T \frac{\ln(r/r_2)}{\ln(r_1/r_2)}$	$T_{s,1} - \Delta T \left[\frac{1 - (r_1/r)}{1 - (r_1/r_2)} \right]$
Fluxo térmico (q'')	$k \frac{\Delta T}{L}$	$\frac{k \Delta T}{r \ln(r_2/r_1)}$	$\frac{k \Delta T}{r^2 [(1/r_1) - (1/r_2)]}$
Taxa de transferência de calor (q)	$kA \frac{\Delta T}{L}$	$\frac{2\pi Lk \Delta T}{\ln(r_2/r_1)}$	$\frac{4\pi k \Delta T}{(1/r_1) - (1/r_2)}$
Resistência térmica ($R_{t,cond}$)	$\frac{L}{kA}$	$\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi Lk}$	$\frac{(1/r_1) - (1/r_2)}{4\pi k}$

^aO raio crítico do isolante é $r_{cr} = k/h$ para o cilindro e $r_{cr} = 2k/h$ para a esfera.

Raio crítico é o raio abaixo do qual q' aumenta com aumento de r e acima do qual – diminui q com aumento de r .