



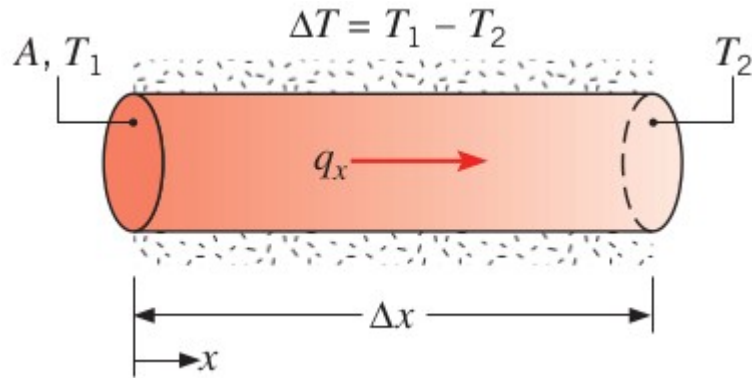
Condução térmica

Prof. Alexei Essiptchouk

**Dep. Engenharia Ambiental
Instituto de Ciência e Tecnologia
Universidade Estadual Paulista
“Júlio de Mesquita Filho”**

Equação da taxa de condução

Lei de Fourier é fenomenológica, i.e. desenvolvida a partir de fenômenos observados em vez de ser derivada a partir de princípios fundamentais.



$$q_x \sim \Delta T$$

$$q_x \sim A$$

$$q_x \sim \frac{1}{\Delta x}$$

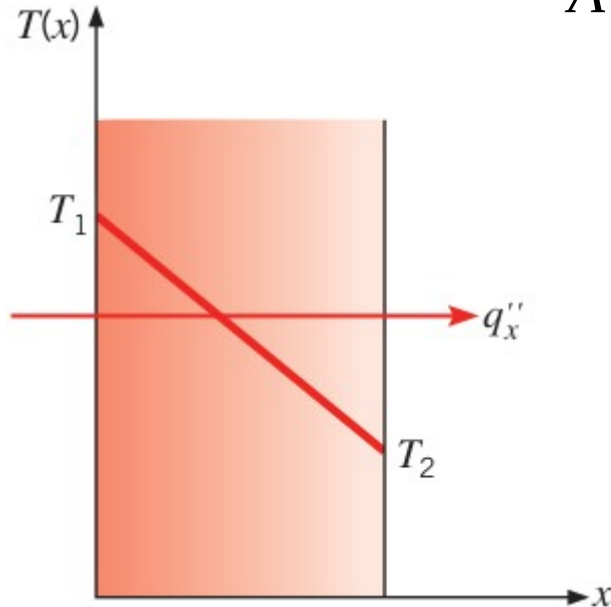
$$q_x \sim k$$

$$q_x = -k A \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Equação da taxa de condução

$$q_x = -k A \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{Taxa de transferência de calor}$$

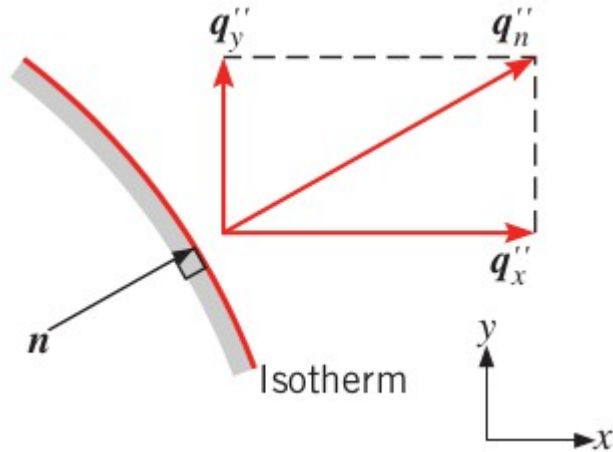
$$q_x'' = \frac{q_x}{A} = -k \frac{dT}{dx} \quad \text{Fluxo de calor}$$



O sentido do fluxo de calor q_x'' é positivo enquanto o gradiente da temperatura é negativo

Equação da taxa de condução

$$\mathbf{q}'' = -k \nabla T = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{k} \right)$$



$\mathbf{q}$ – vetor do fluxo térmico

∇ Operador “grad”

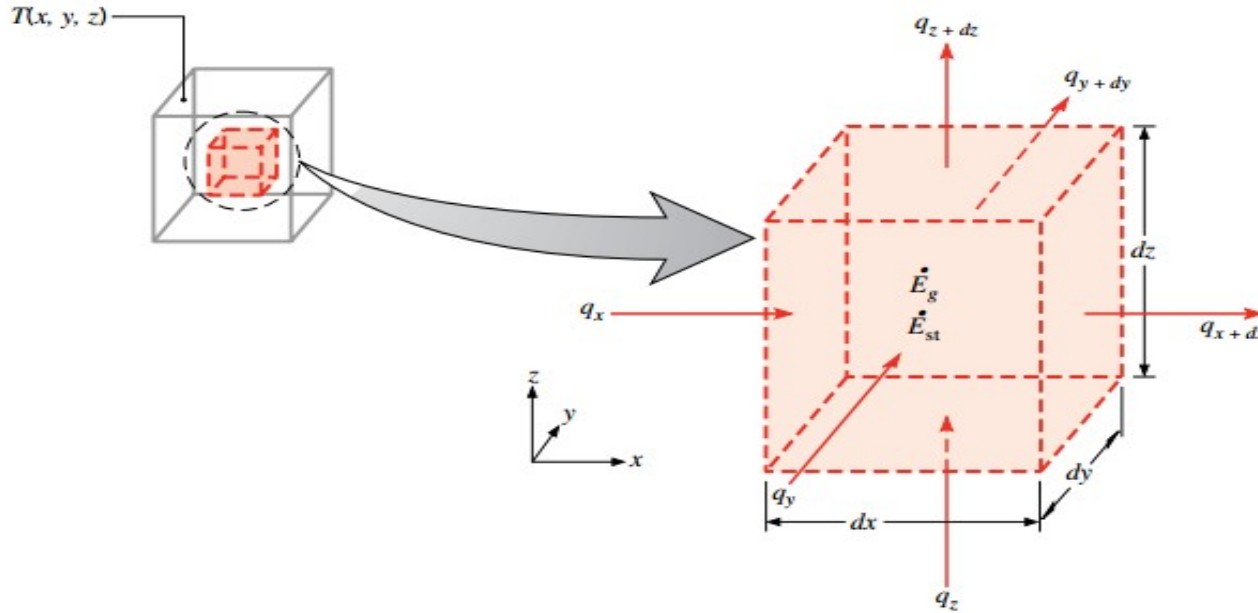
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – vetores unitários nas direções x, y e z

A direção do fluxo de calor é sempre normal a uma superfície de temperatura constante, chamada isotérmica

$$\mathbf{q}'' = q'' \mathbf{n} = -k \frac{dT}{dn} \mathbf{n}$$

$$\mathbf{q}'' = q''_x \mathbf{i} + q''_y \mathbf{j} + q''_z \mathbf{k}$$

Equação da difusão térmica



Taxas de transferência de calor nas superfícies como uma expansão em série de Taylor

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz$$

Conservação da energia

$$\dot{E}_{ent} + \dot{E}_{ger} - \dot{E}_{sai} = \dot{E}_{acu}$$

Taxa de geração de calor

$$\dot{E}_{ger} = \dot{q} dxdydz$$

Taxa de acumulo de calor

$$\dot{E}_{acu} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz$$

$$q_x = -k dy dz \frac{\partial T}{\partial x}$$

ρ é a densidade

c_p é o calor específico

Equação da difusão térmica

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Em qualquer ponto do meio, a taxa líquida de energia por condução para interior de volume unitário somada à taxa volumétrica de geração de energia térmica tem que ser igual à taxa de variação da energia térmica acumulada no interior deste volume

Caso: $k = \text{const}$ $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$ $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ difusividade térmica

Caso: regime estacionário $\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = 0$

Caso: transferência unidimensional, estacionário e sem geração de energia

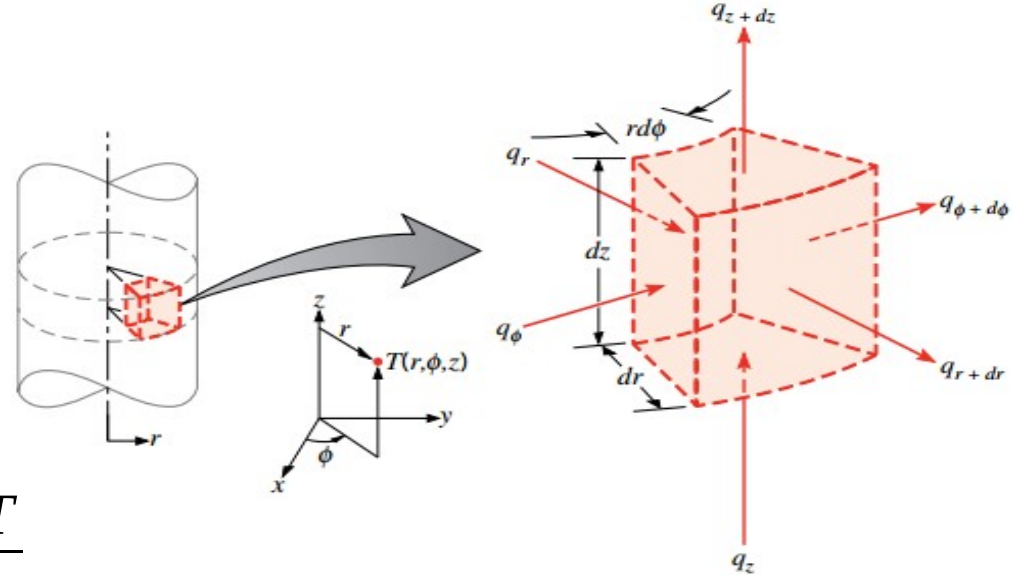
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0 \rightarrow \frac{dq_x''}{dx} = 0 \quad \text{Fluxo de calor } q_x'' = \frac{q_x}{A} \text{ é uma constante!}$$

Equação da difusão térmica: Coordenadas cilíndricas

Componentes do fluxo térmico: **radial, circunferencial e axial**

$$q'' = -k \nabla T =$$
$$= -k \left(\frac{\partial T}{\partial r} \mathbf{i} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{k} \right)$$

$$q_r'' = -k \frac{\partial T}{\partial r} \quad q_\phi'' = -\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \quad q_z'' = -k \frac{\partial T}{\partial z}$$



$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

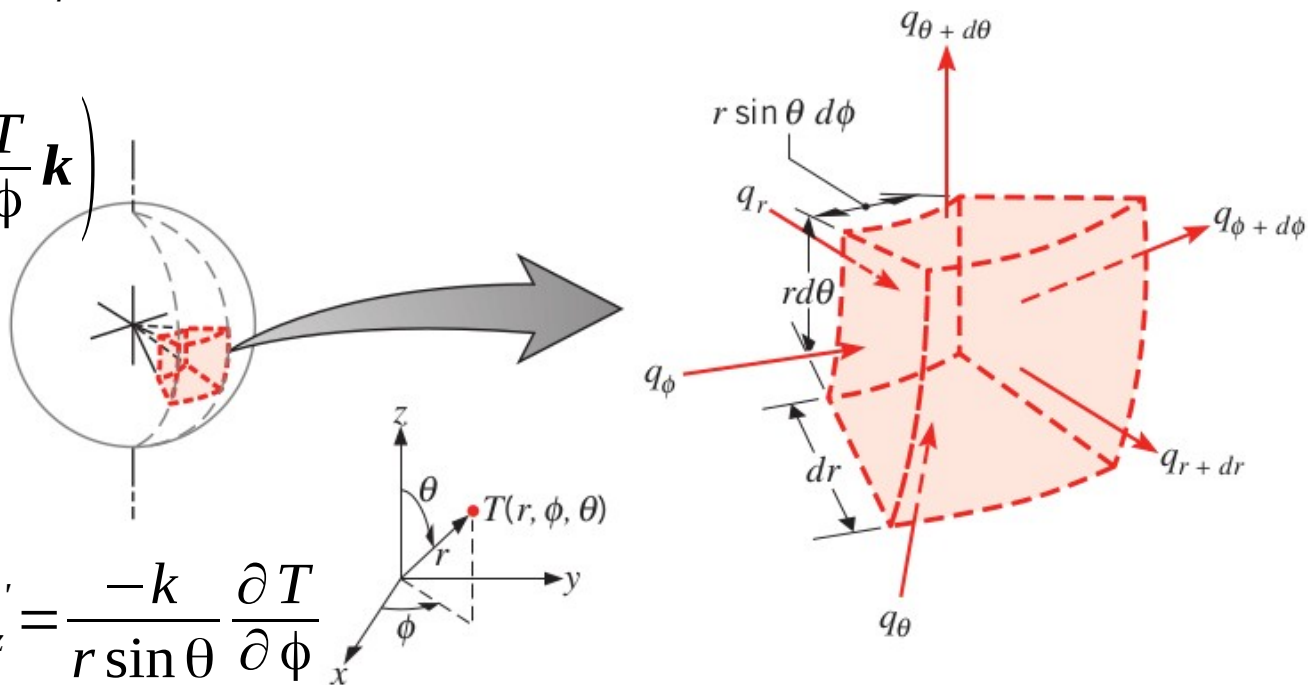
Equação da difusão térmica: Coordenadas esféricas

Componentes do fluxo térmico: r, ϕ, θ

$$\mathbf{q}'' = -k \nabla T =$$

$$= -k \left(\frac{\partial T}{\partial r} \mathbf{i} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \mathbf{j} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \mathbf{k} \right)$$

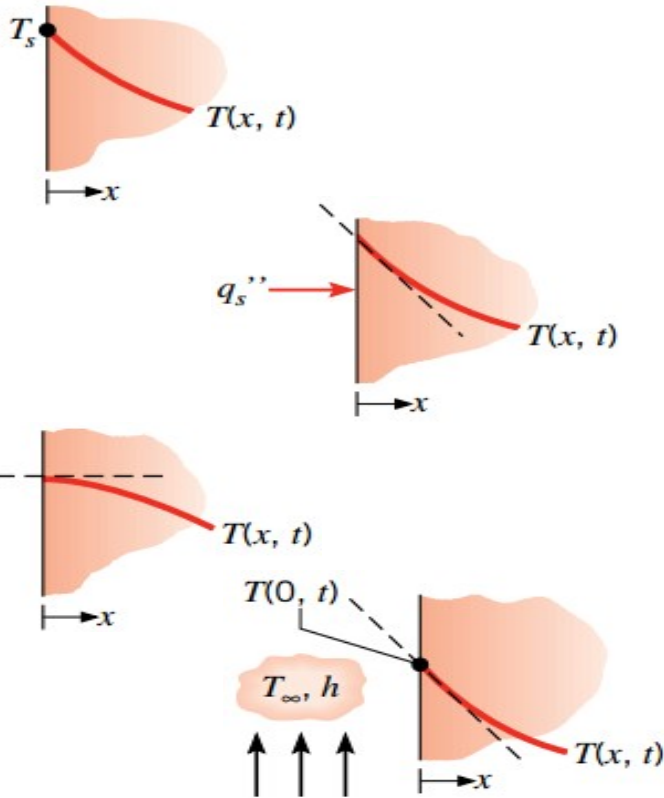
$$q_r'' = -k \frac{\partial T}{\partial r} \quad q_\phi'' = -\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad q_\theta'' = \frac{-k}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi}$$



$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(k r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Condições de contorno e inicial

A solução da equação da difusão térmica depende das condições físicas existentes nas fronteiras do meio (condições contornos) e das condições existentes em algum instante do tempo (condições iniciais)



Temperatura na superfície é constante. Condição de Dirichlet

$$T(0, t) = T_s$$

Fluxo térmico na superfície constante:

- Diferente de zero. Condição de Neumann

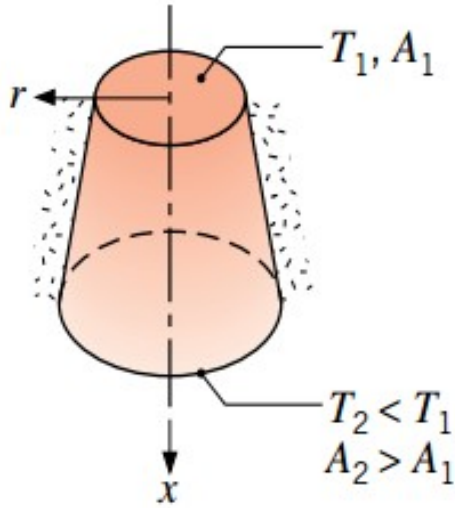
$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_s''$$

- Isolada termicamente (adiabática) $-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$

Condição de convecção na superfície (Robin).

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h [T_\infty - T(0, t)]$$

Exemplo 1



Um tronco de cone sólido serve como um suporte.

A condutividade térmica varia com temperatura

$$k = k_0 - aT$$

Determinar a variação ao longo do x :

- 1) A taxa de transferência de calor, q , [W]
- 2) A densidade do fluxo térmico, q'' , [W/m²]
- 3) A condutividade térmica, k , [W/(m K)]
- 4) O gradiente de temperatura dT/dx

$$\dot{E}_{ent} = \dot{E}_{sai} \quad q_x = q_{x+dx} \quad q_x = \text{independente do } x$$

Suposições:

- Condução unidimensional
- Regime permanente
- Laterais adiabáticos
- Não há fontes internos

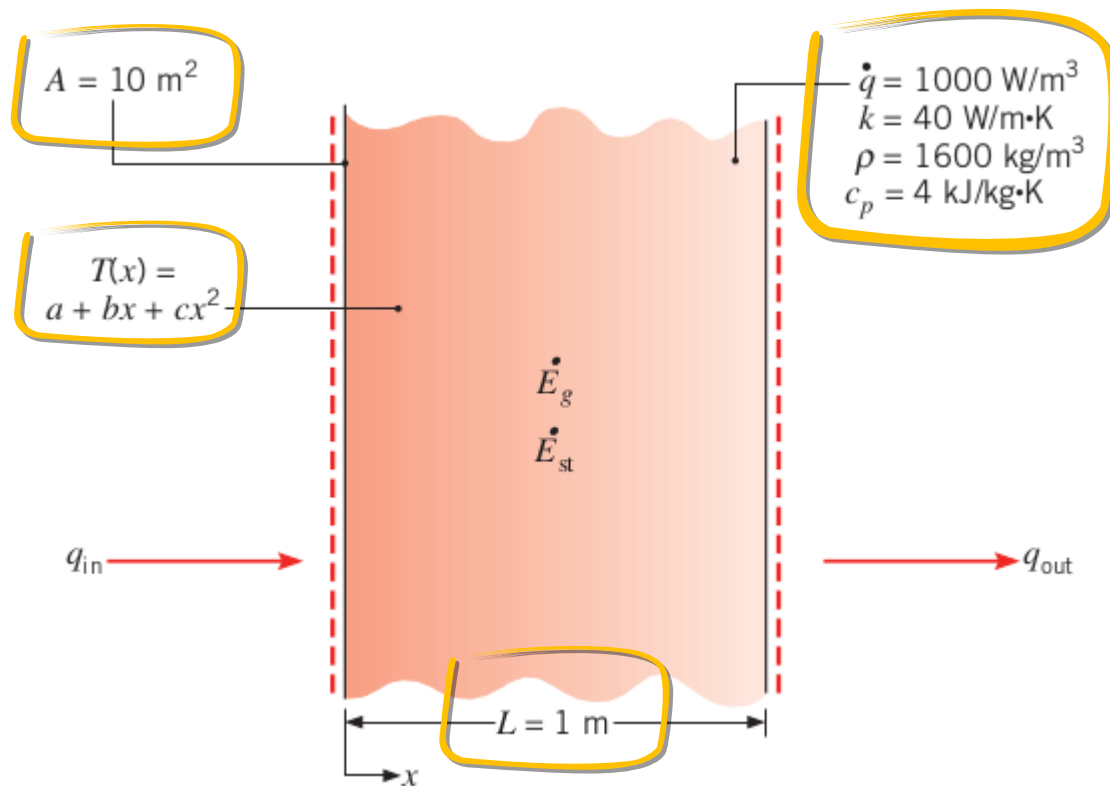
$$A(x) \uparrow \text{com } (x) \rightarrow q_x'' = \frac{q_x}{A(x)} \downarrow$$

como $T \downarrow$ com x então $k \uparrow$ com $(\uparrow x)$

$$\text{Da lei de Fourier } q_x'' = -k \frac{dT}{dx} \rightarrow \left| \frac{dT}{dx} \right| = \left| -\frac{q_x''}{k} \right| \rightarrow \begin{matrix} q_x'' \downarrow \\ k \uparrow \end{matrix} \rightarrow \frac{10}{17} \downarrow$$

Exemplo 2

1. Determinar a taxa de transferência de calor que entra na parede ($x = 0$) e que deixa a parede ($x = 1\text{ m}$)
2. Determinar a taxa de variação da energia acumulada na parede
3. Determinar a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo nas posições $x = 0$; 0.25 e 0.5 m .



$$a = 900\text{ }^\circ\text{C}, b = 300\text{ }^\circ\text{C/m}, \text{ e } c = 50\text{ }^\circ\text{C/m}^2$$

Exemplo 2

$$T(x) = a + bx + cx^2$$

1

$$q_x = -k A \frac{\partial T}{\partial x} = -kA(b + 2cx)$$

$$q(0) = -kAb = 120 \text{ kW}$$

$$q(L=1) = -kA(b + 2cL) = 160 \text{ kW}$$

$$\dot{E}_{ent} + \dot{E}_{ger} - \dot{E}_{sai} = \dot{E}_{acu} \quad 2$$

$$\dot{E}_{acu} = q_{ent} + \dot{q} AL - q_{sai}$$

$$\dot{E}_{acu} = 120 + 1000 \times 10 \times 1 - 160$$

$$\dot{E}_{acu} = -30 \text{ kW}$$

3

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 2c$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{\rho c}$$

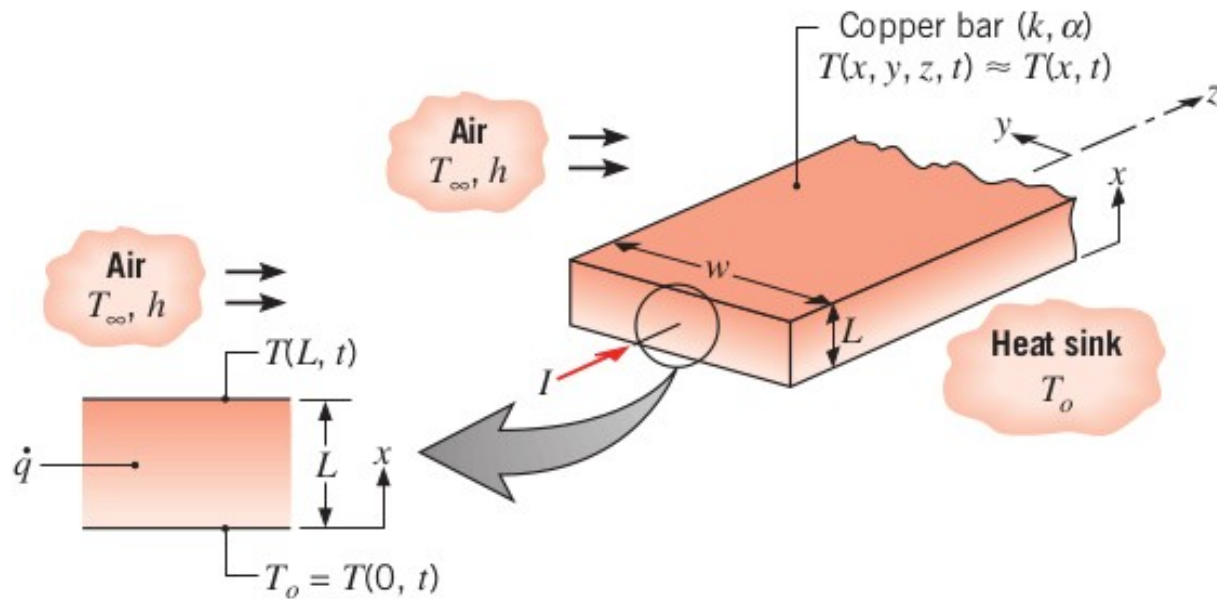
$$\frac{\partial T}{\partial t} = -4.69 \times 10^{-4} \text{ C/s}$$

Exemplo 3

Uma longa barra com secção transversal retangular, cuja largura w é bem maior que a sua espessura L , é mantida em contato com um sumidouro de calor na sua superfície inferior e a temperatura ao longo da barra é aproximadamente igual à do sumidouro, T_0 . Subitamente uma corrente elétrica é passada através da barra e uma corrente de ar, com a temperatura T_∞ , é passada sobre a sua superfície superior, enquanto a superfície interior continua mantida a T_0 .

Obter a equação diferencial e as condições inicial e de contorno que podem ser usadas para determinar a temperatura em função da posição e do tempo na barra.

Exemplo 3



Equação diferencial

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

condição inicial

$$T(x, 0) = T_0$$

condições de contorno

$$T(0, t) = T_0$$

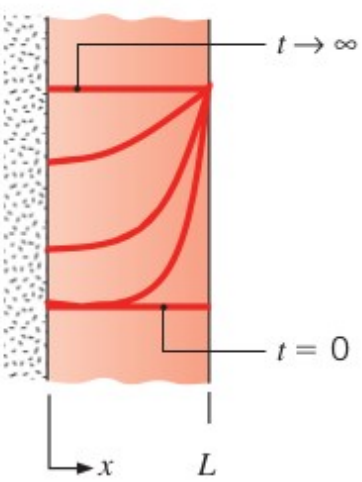
$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \bigg|_{x=L} = h(T(L, t) - T_\infty)$$

Exemplo 4

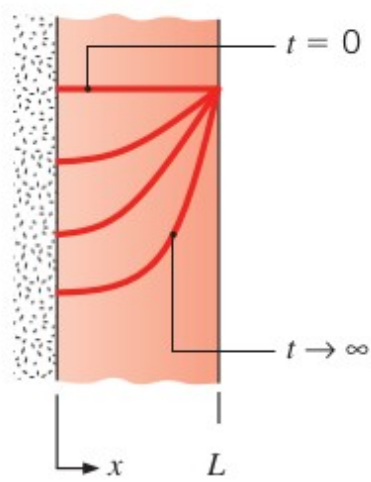
Distribuições de temperaturas no interior de uma série de paredes planas unidimensionais no instante inicial, no regime estacionário e em alguns tempos intermediários tem a forma mostrada nas figuras.

Para cada caso escreva a forma apropriada da equação da difusão térmica e condições iniciais e de contorno.

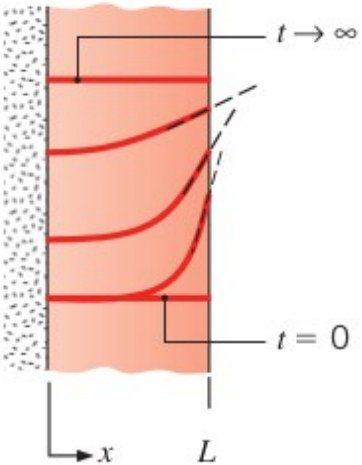
No caso de ocorrência de geração volumétrica – ela é uniforme em toda a parede. As propriedades são constantes.



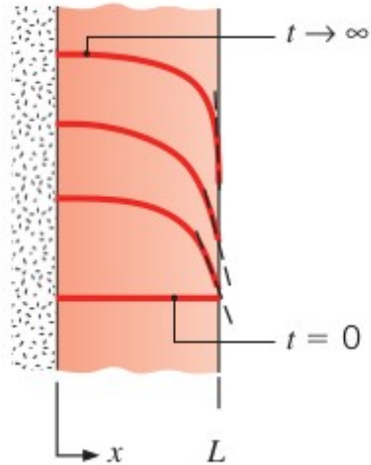
(a)



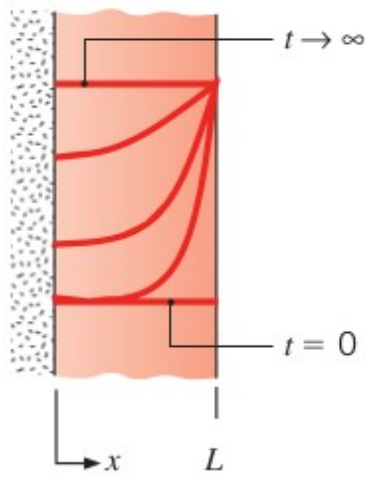
(b)



(c)



(d)



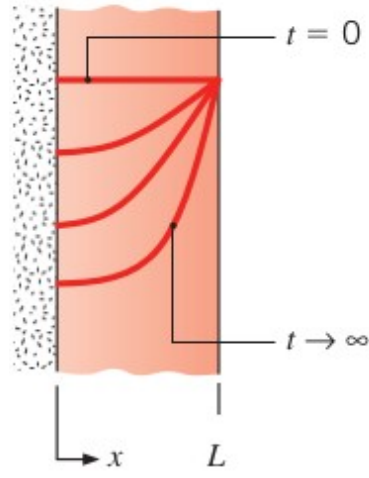
(a)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(x, 0) = T_0$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$$

$$T(L, t) = T_1$$



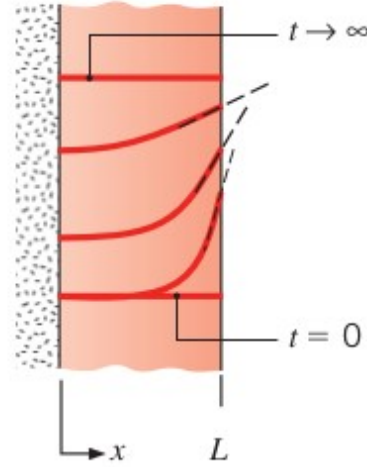
(b)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(x, 0) = T_1$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$$

$$T(L, t) = T_1$$



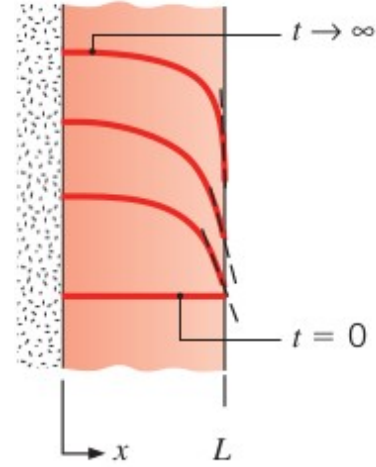
(c)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(x, 0) = T_0$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = h(T(L, t) - T_\infty)$$



(d)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(x, 0) = T_0$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$$

Problema

Condução bidimensional, em regime estacionário, ocorre em um sólido cilíndrico oco de condutividade térmica $k = 22 \text{ W/(m K)}$, raio externo $r_e = 1,5 \text{ m}$ e comprimento total $2z_e = 8 \text{ m}$, no qual a origem do sistema de coordenadas encontra-se localizada no meio da linha central. A superfície interna do cilindro é isolada termicamente e a distribuição de temperaturas no cilindro tem a forma $T(r,z) = a + br^2 + c\ln(r) + dz^2$, na qual $a = -20 \text{ °C}$, $b = 150 \text{ °C/m}^2$, $c = -12 \text{ °C}$, $d = -300 \text{ °C/m}^2$, e r e z estão em metros.

- (a) Determine o raio interno r_i do cilindro.
- (b) Obtenha uma expressão para a taxa volumétrica de geração de calor, $\dot{q} \text{ (W/m}^3\text{)}$.
- (c) Determine a distribuição axial dos fluxos térmicos na superfície externa, $q_r''(r_e, z)$. Qual é a taxa de transferência de calor na superfície externa? Ela ocorre para dentro ou para fora do cilindro?
- (d) Determine a distribuição radial dos fluxos térmicos nas faces extremas do cilindro, $q''(r, +z_e)$ e $q''(r, -z_e)$. Quais são as taxas de transferência de calor correspondentes? Elas ocorrem para dentro ou para fora do cilindro?
- (e) Verifique se os seus resultados são consistentes com um balanço de energia global no cilindro.