

Exercícios Resolvidos – Superfícies Quádricas

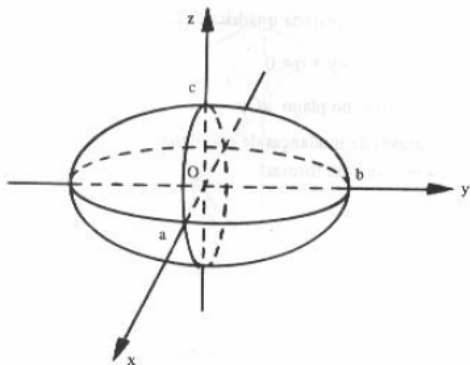
* Do **Livro** de Geometria Analítica - Alfredo Steinbruch, Paulo Winterle.

1 – Revisão de conteúdo.

2 – Veja alguns exemplos gráficos de superfícies geradas a partir do computador. Partindo de exercícios mais simples, e seguindo até as formas mais complicadas.

Uma brevíssima revisão das equações e dos gráficos de superfícies:

Elipsóide:



Centro $C(0, 0, 0)$:

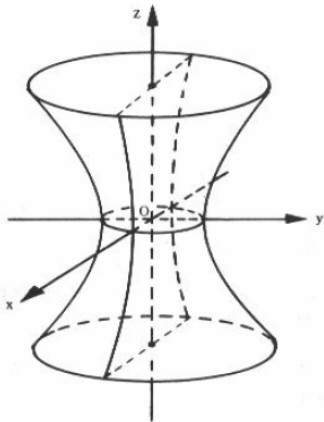
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

O sinais da equação são positivos.
a, b e c são os eixos das elipses.

Centro $C(h, k, l)$:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$$

Hiperbolóide de uma folha:



Centro $C(0, 0, 0)$.

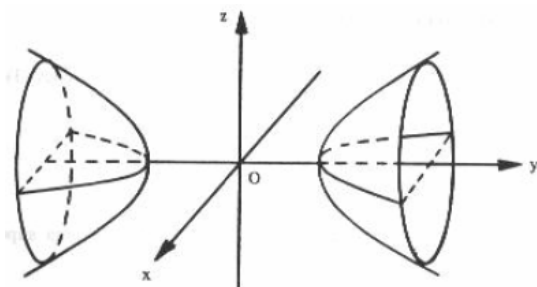
Um dos sinais é sempre negativo.

$$(1) \quad ++- : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$(2) \quad +-+ : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$(3) \quad -++ : -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Hiperbolóide de duas folhas:



Centro $C(0, 0, 0)$.

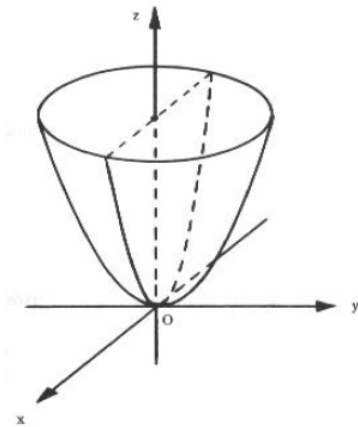
Dois sinais são sempre negativos.

$$(1) \quad +-- : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$(2) \quad -+- : -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$(3) \quad --+ : -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Parabolóide Elíptico:



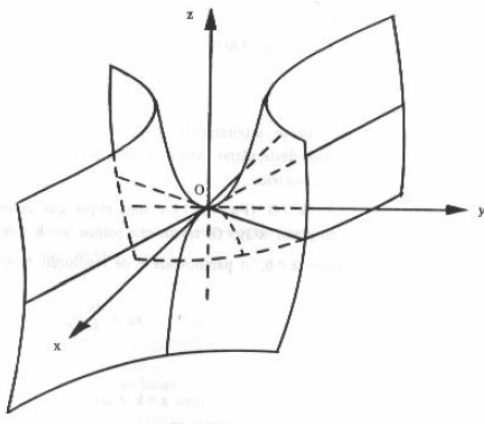
Os sinais são iguais.
ax, by, cz

$$(1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$

$$(2) \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = by$$

$$(3) \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = ax$$

Parabolóide Hiperbólico (Sela):



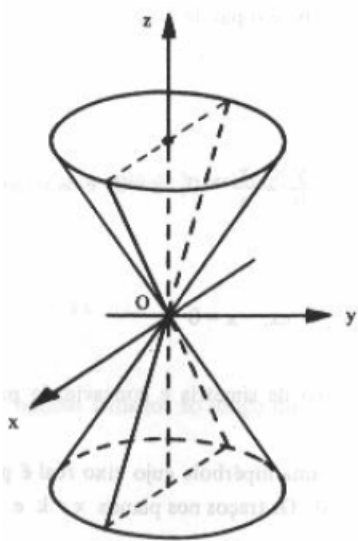
Os sinais são contrários.

$$(1) \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = cz$$

$$(2) \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = by$$

$$(3) \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = ax$$

Superfície Cônica:



Equações semelhantes às do Elipsóide porem igualadas à zero.

O termo de sinal negativo indica o eixo dos cones.

$$(1) \text{ eixo } z \text{ (fig. ao lado): } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$z=0$, $a=b$, obtém-se uma **superfície cônica circular**. Mas se $a \neq b$ então obtém-se uma **superfície cônica elíptica**. O mesmo se aplica nas demais equações.

$$(2) \text{ eixo } x: -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$(3) \text{ eixo } y: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Livro, pg. 289, 8.6 Problemas Propostos, exercício 01.

Identificar as quádricas representadas pelas equações:

b) $2x^2 + 4y^2 + z^2 - 16 = 0$

Solução:

$$\frac{2x^2 + 4y^2 + z^2 = 16}{16} \Rightarrow \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$

$x = 0$, $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$

elipse: $a = \pm 4$, $b = \pm 2$.

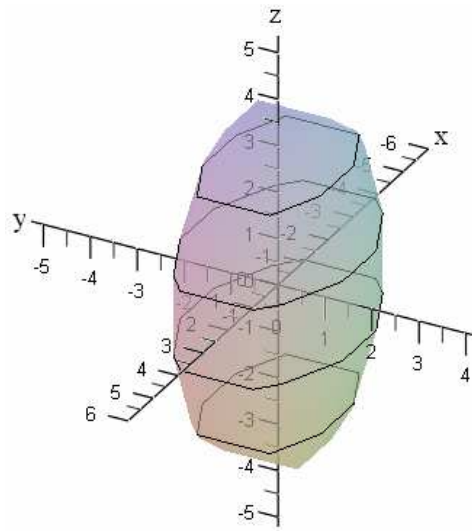
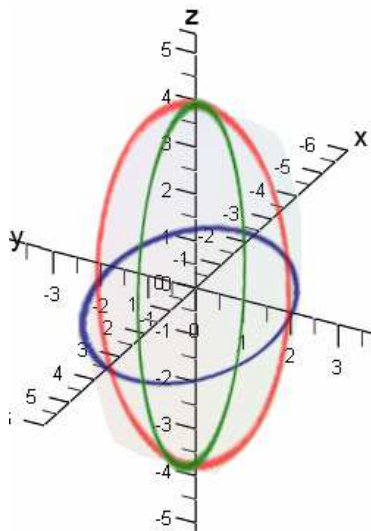
$y = 0$, $\frac{x^2}{8} + \frac{z^2}{16} = 1$

elipse: $a = \pm 4$, $b = \pm \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2,83$

$z = 0$, $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

elipse: $a = \pm \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2,83$, $b = \pm 2$

Os gráficos serão gerados por computador, e os esboços ficarão por conta do estudante.



Elipsóide

i) $z = x^2 + y^2$

Solução:

$x=0$, $z = y^2$

Essa equação identifica uma parábola que intercepta o eixo z e percorre o eixo y

$y=0$, $z = x^2$

Essa equação identifica uma parábola que intercepta o eixo z e percorre o eixo x

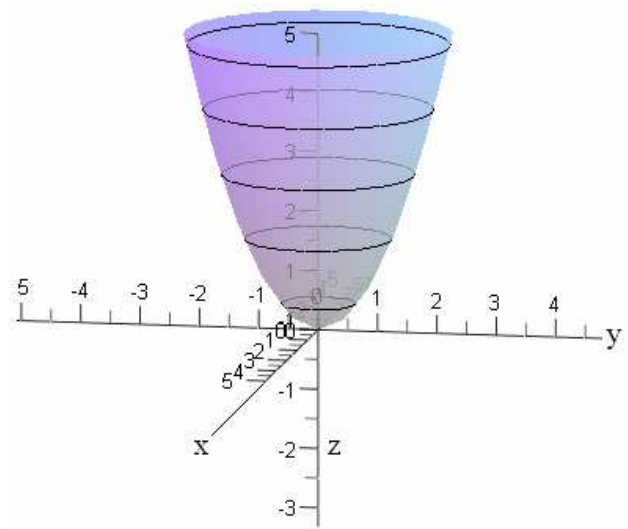
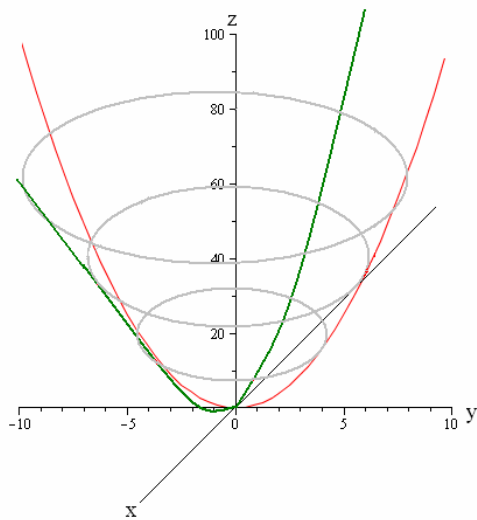
$z = x^2 + y^2$

Essa equação identifica uma circunferência, no centro do sistema xyz

$z=0$, $x^2+y^2=0$ (raio = 0, não existe circunferência)

$z=4$, $x^2+y^2=4$ (raio = 2, existe circunferência)

e a medida que aumentamos **z**, o raio também aumenta (proporcionalmente), e o parabolóide vai crescendo infinitamente!



Parabolóide circular.

n) $4y^2 + z^2 - 4x = 0$

Solução:

Apenas manipulando a equação, dividindo tudo por 4 e isolando x.

$$\frac{4y^2 + z^2 - 4x = 0}{4} \Rightarrow y^2 + \frac{z^2}{4} = x$$

Essa última equação, identifica uma elipse que varia no eixo x.

Vemos que o **eixo maior (2a)** está em z, e o **eixo menor (2b)** em y.

Dando valores para x, fica mais fácil de desenhar:

$x = 0$, não existe elipse!

x = 1 , $y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$

eixo maior em z, $a^2=4$, $b^2=1$

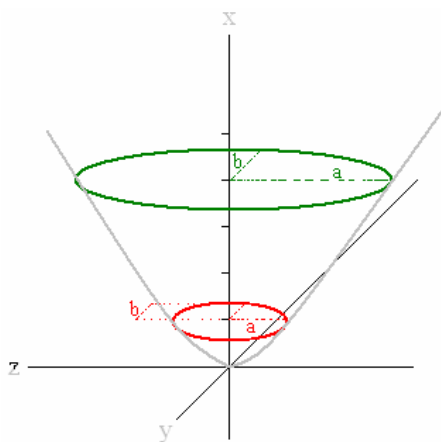
logo $a = \pm 2$, $b = \pm 1$

x = 4 , $y^2 + \frac{z^2}{4} = 4 \Rightarrow \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$

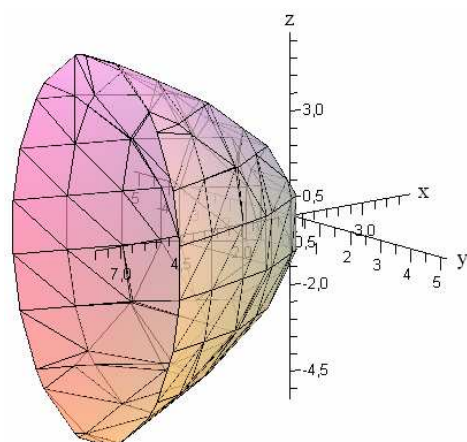
eixo maior em z, $a^2=16$, $b^2=4$

logo $a = \pm 4$, $b = \pm 2$

Veja que se zerarmos y e depois z , temos as parábolas de equações: $z^2 = 4x$ e $y^2 = x$.
A parábola cinza do gráfico tem equação: $z^2 = 4x$



Veja que a elipse aumenta conforme percorre o eixo x.



O software mudou o ângulo, mas os eixos onde a elipse varia, são os mesmos!

Parabolóide elíptico.

Prova de exame, exercício 5 (Udesc 2009/2).

Identificar as quádricas definidas pelas equações e representar graficamente:

a) $-\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

b) $y = -x^2 - 3z^2 + 2$

Solução:

a) O processo é o mesmo veja (e você tem que dominar o conteúdo de hipérboles).

$x = 0, \frac{z^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

Identifica uma hipérbole. No eixo z (± 3), e em y (± 2). Com esses pontos traçamos as assíntotas e depois a hipérbole.

$y = 0, -\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$

Também identifica uma hipérbole no eixo z (± 3), e em x (± 2).

$z = 0$, aqui não existe curva.

Logo com as duas hipérboles já temos uma idéia do que se trata e podemos fazer o gráfico.

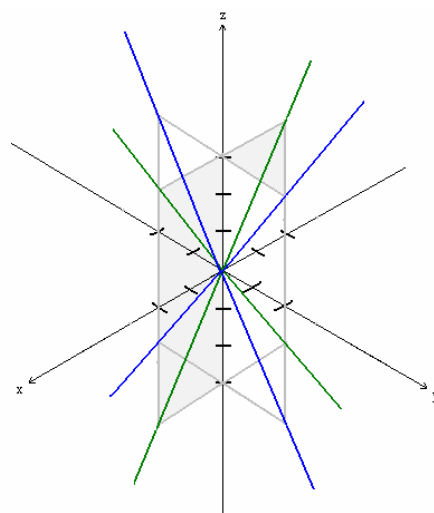
Na (fig. a) mostra-se as assíntotas.

Em azul estão as do plano yOz , quando $x = 0$.

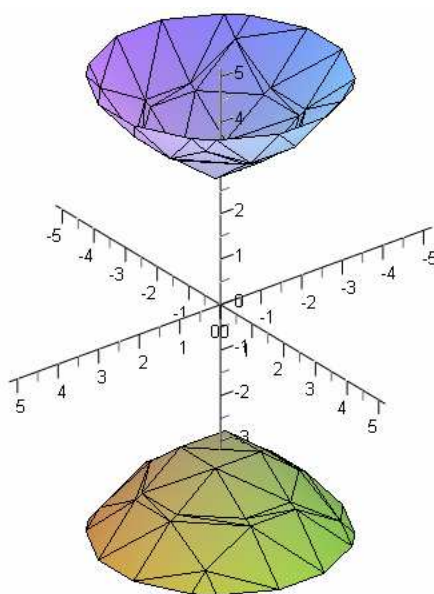
Em verde estão as do plano xOz , quando $y = 0$.

O significado das assíntotas nesse caso, é que o hiperbolóide (de duas folhas) vai se aproximando das retas, mas nunca o tocando (isso nos dá uma idéia de como desenhar, por isso é útil).

Hiperbolóide de duas folhas.



(fig.a)



(fig.b)

b) $y = -x^2 - 3z^2 + 2$

Solução:

Um pouco confuso, mas manipulando chegamos a uma visualização melhor da equação:

$$y - 2 = -x^2 - 3z^2$$

$$x^2 + 3z^2 = 2 - y$$

Agora dividindo por dois, isso por que quando fazemos $y = 0$, temos a equação igualada a um, e isso nos dá uma elipse que varia no eixo y :

$$\frac{x^2}{2} + \frac{3z^2}{2} = \frac{2-y}{2}$$

ou: $\frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{\frac{2}{3}} = \frac{2-y}{2}$

Então quando $y = 0$, $\frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{\frac{2}{3}} = 1$

Isso identifica uma elipse com eixo maior em x , e eixo menor em z .

Voltando a equação dada temos:

$$y = -x^2 - 3z^2 + 2$$

E quando fazemos $z = 0$

$$y = -x^2 + 2$$

Isso identifica uma **parábola no eixo $0y$ (em relação à x)** com concavidade negativa.

E quando $x = 0$

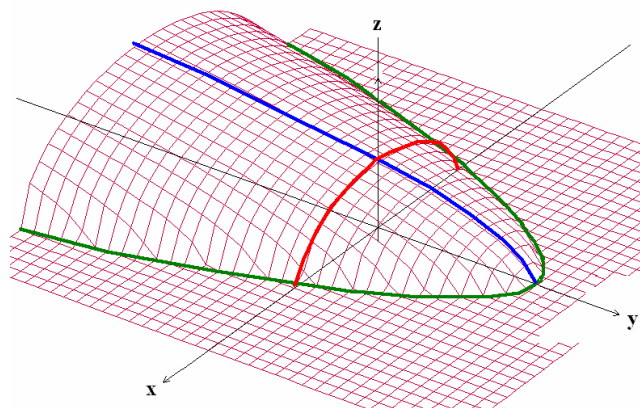
$$y = -3z^2 + 2$$

temos uma **parábola também no eixo $0y$ (mas em relação à z)**, com concavidade negativa.

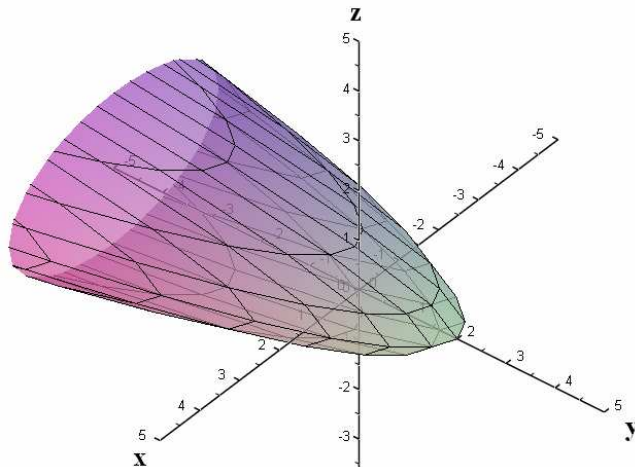
Logo, duas parábolas negativas e uma elipse que varia no eixo y .

Parabolóide elíptico.

Podemos ver as parábolas e a elipse, siga as cores. Neste gráfico somente uma parte das curvas foram feitas.



Neste gráfico podemos ver bem a elipse (como se fosse a boca do gráfico) que define o parabolóide elíptico.



Prova, exercício 4 (4,0 pts.) (Udesc 2009/2).

Identificar as seguintes superfícies e representar graficamente:

As análises ficam por conta do estudante, veja os gráficos e exercite!

a) $z = -x^2 - 2y^2 + 1$

b) $-\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 + \frac{y^2}{4}$

c) $\frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 3x$

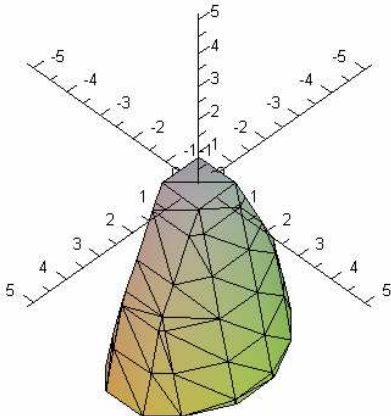
d) $z - y^2 = 1$

e) $x^2 + z^2 - 2z = 0$

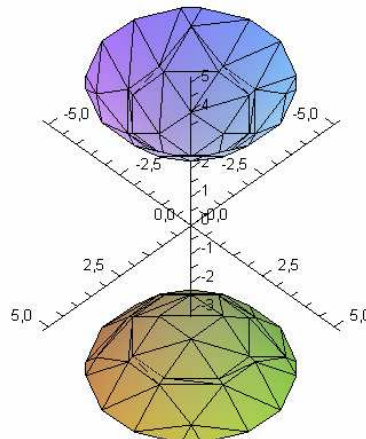
f) $36x^2 - 72x + 4y^2 + 9z^2 = 36$

Solução:

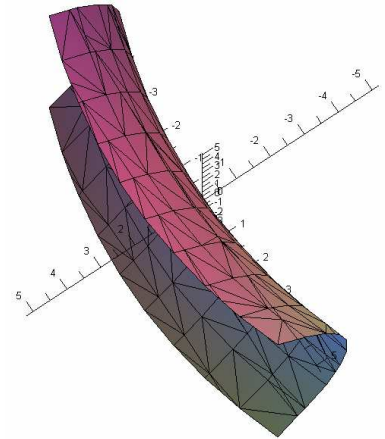
a) Parabolóide elíptico



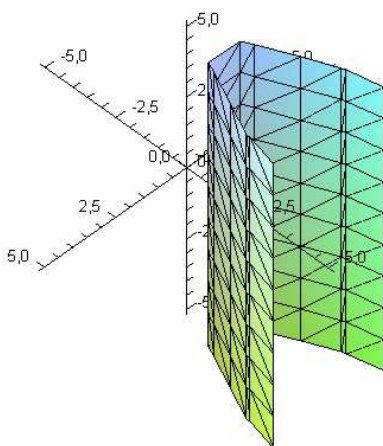
b) Hiperbolóide de duas folhas



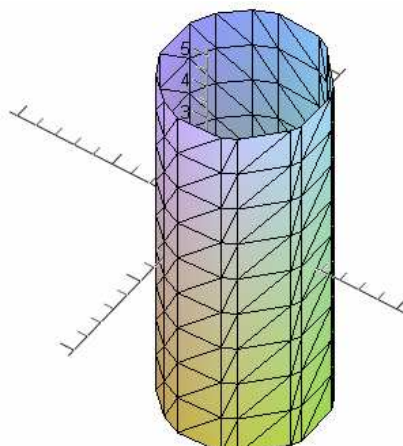
c) Parabolóide Hiperbólico



d) Superfície Cilíndrica Parabólica.



e) Superfície cilíndrica circular.



f) Elipsóide.

