

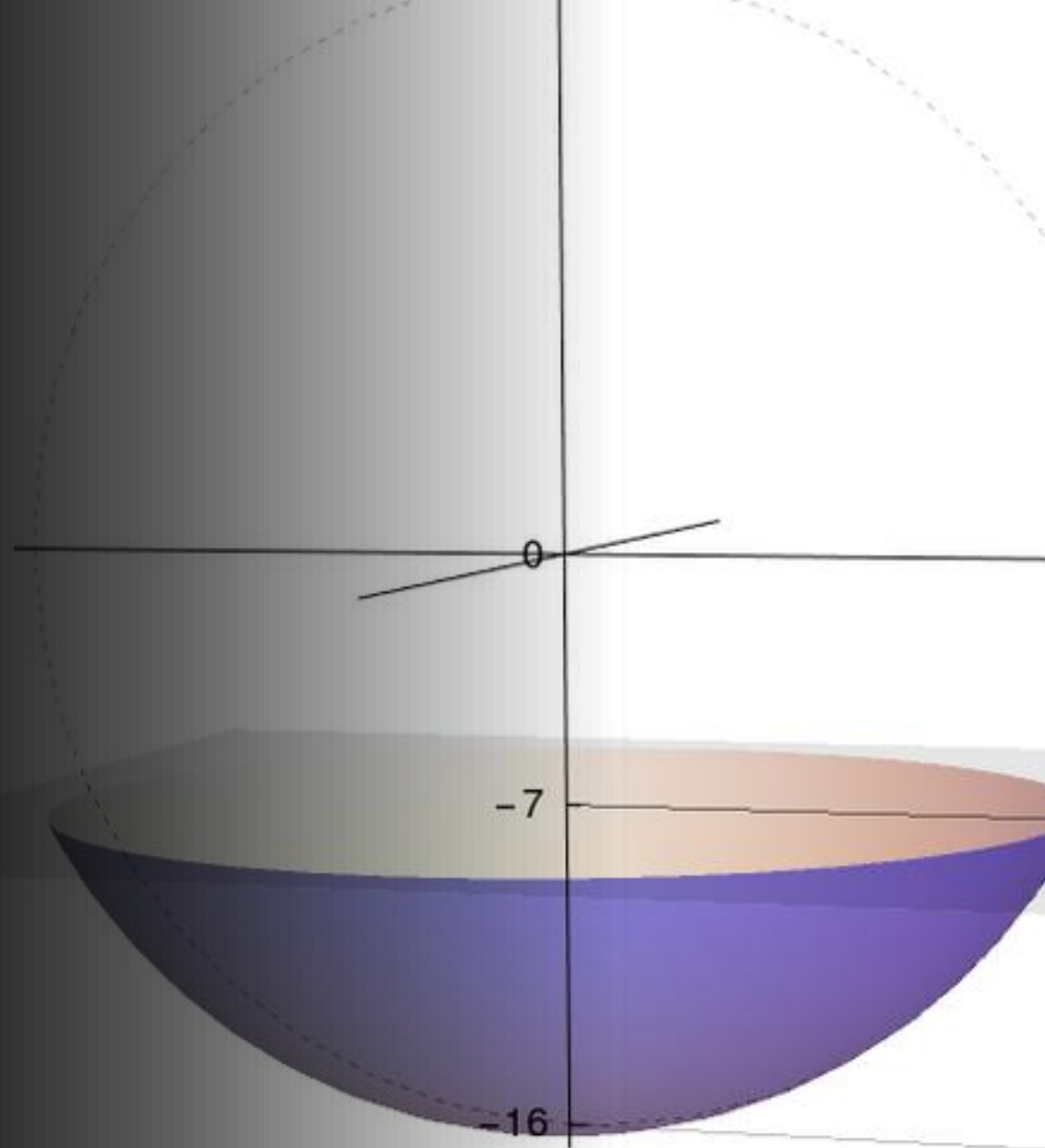


SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

Geometria Analítica

Prof. Dra. Luz Stefany Murcia-
Correa

luz.m.correa@unesp.br



A equação geral do 2º grau nas três variáveis x , y e z

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0 \quad (1)$$

Onde pelo menos um dos coeficientes a , b , c , d , e ou f é diferente de zero, *representa uma superfície quádrlica, ou simplesmente, uma quádrlica.*

Por exemplo, o traço da superfície quádrlica **(1)** no plano $z = 0$ é a cônica

$$ax^2 + by^2 + 2dxy + mx + ny + q = 0$$

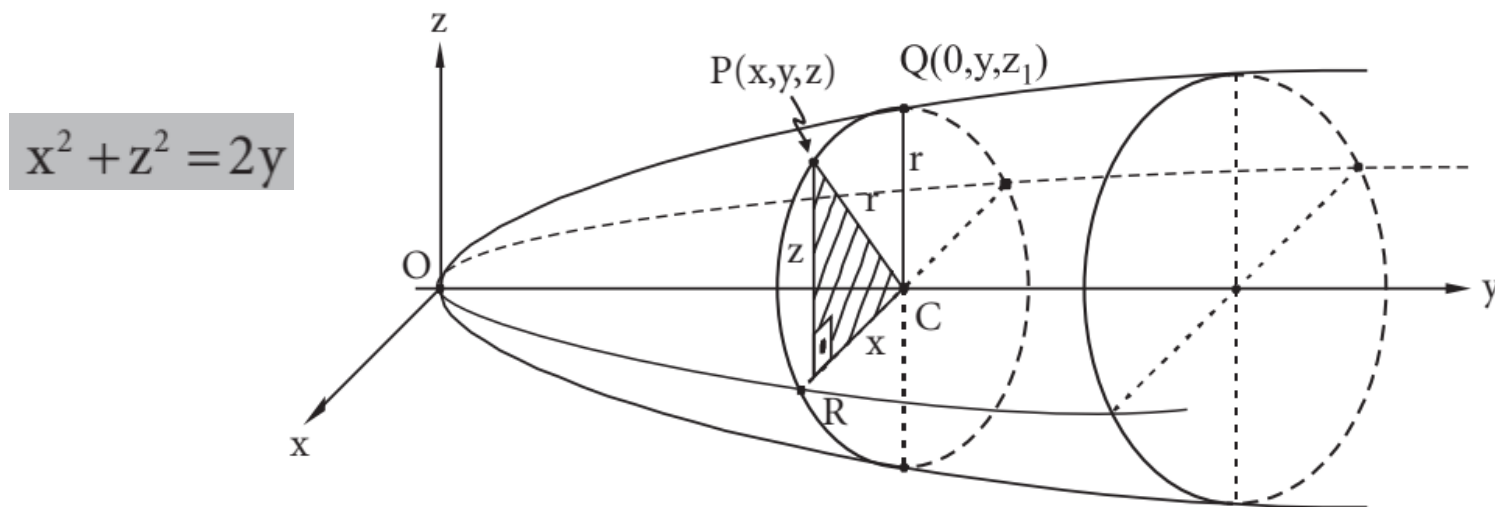
contida no plano $z=0$, isto é, no plano xOy , e representa uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola, pois suas equações gerais são desse tipo.

SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

Superfície de revolução é a superfície gerada por uma curva plana (chamada geratriz) que gira 360º em torno de uma reta (chamada eixo) situada no plano da curva. Neste caso, o traço da superfície em um plano perpendicular ao eixo é uma circunferência e a equação da superfície de revolução é obtida pela equação da geratriz.

Exemplo

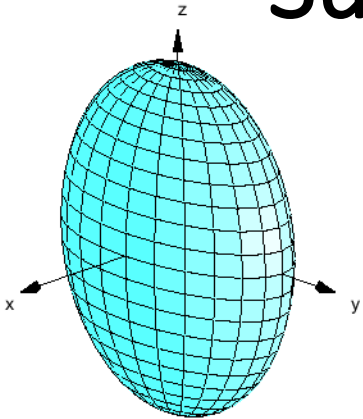
Seja a superfície gerada pela revolução da parábola $\begin{cases} z^2 = 2y \\ x = 0 \end{cases}$ em torno do eixo dos y



Então, se a geratriz estiver contida em um dos planos coordenados e girar 360° em torno de um dos eixos desse plano, a equação da superfície assim gerada será obtida da seguinte maneira: se a curva gira em torno:

- a) do eixo dos x , substitui-se y ou z na equação da curva por $\sqrt{y^2 + z^2}$;
- b) do eixo dos y , substitui-se x ou z na equação da curva por $\sqrt{x^2 + z^2}$;
- c) do eixo dos z , substitui-se x ou y na equação da curva por $\sqrt{x^2 + y^2}$.

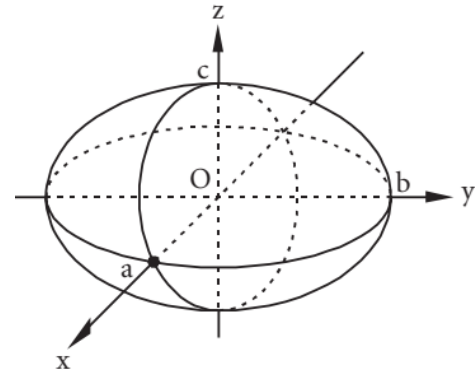
Superfícies Quádricas: Elipsóide



O elipsoide da maneira mais geral é representado pela equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

onde a , b e c são reais positivos e representam as medidas dos semieixos do elipsoide.



No caso de $a = b = c$, a equação toma a forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

e representa uma *superfície esférica* de centro $(0, 0, 0)$ e raio a .

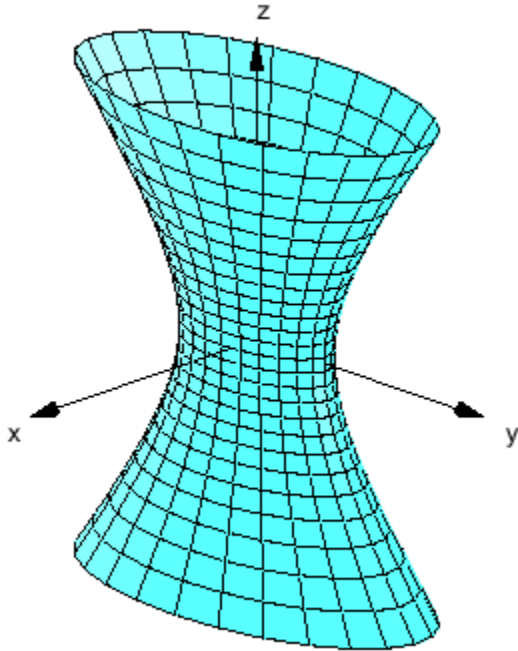
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$$

$C(h, k, l)$

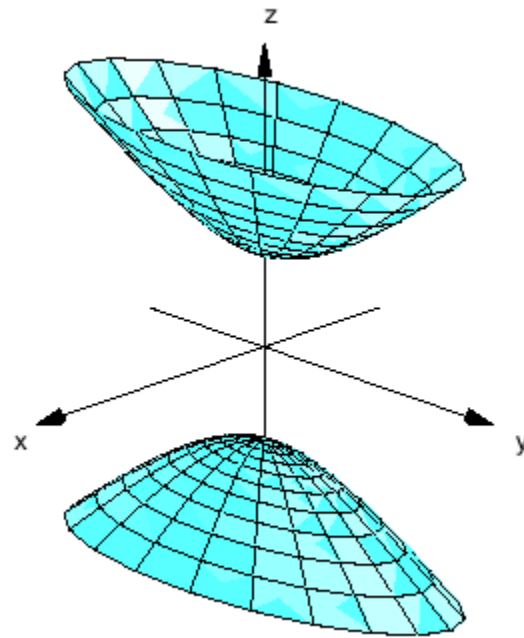
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = r^2$$

Superfícies Quádricas:

Hiperbolóide de uma folha e de duas folhas

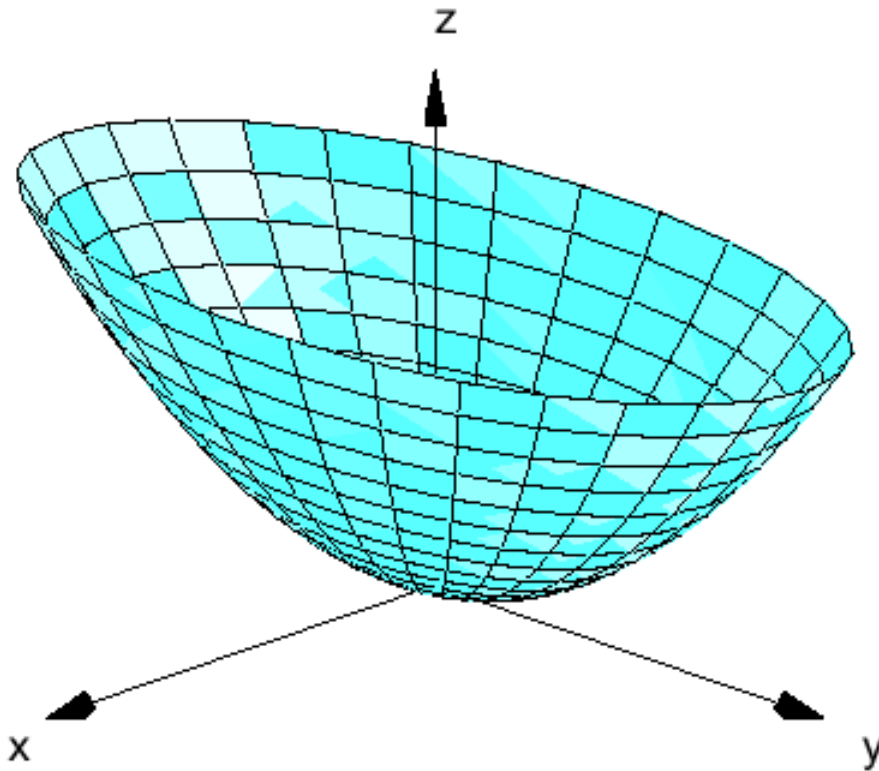


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



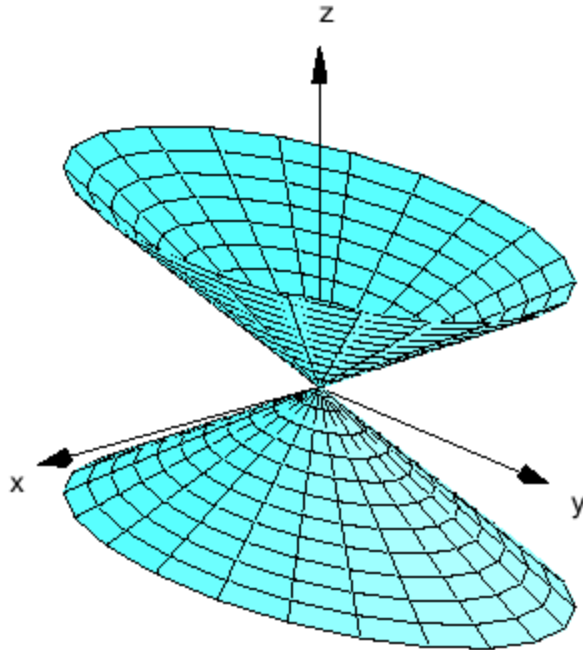
$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Superfícies Quádricas: Parabolóide Elíptico

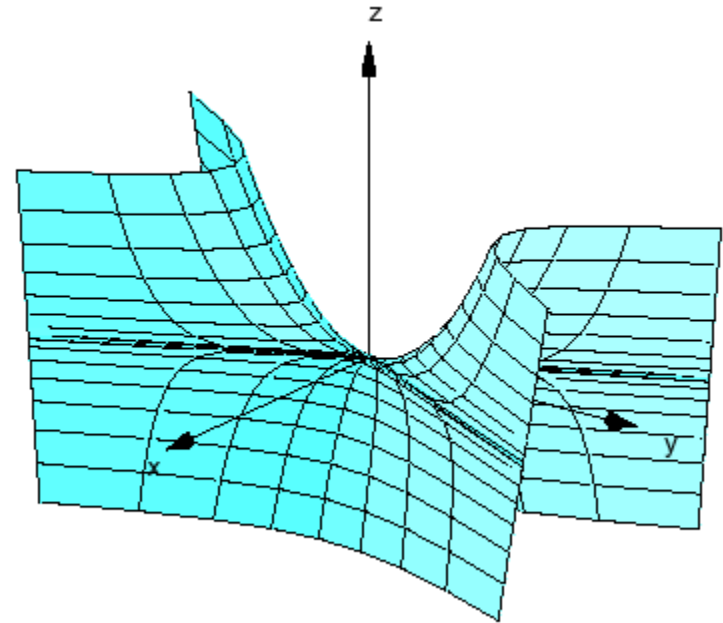


$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Superfícies Quádricas: Cone Elíptico e Parabolóide Hiperbólico



$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

Identificação de Superfícies Quádricas

Exemplos de Equações	Características	Classificação
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Nenhum sinal de menos	Elipsoide
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	Um sinal de menos	Hiperboloide de uma folha
$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Dois sinais de menos	Hiperboloide de duas folhas

Identificação de Superfícies Quádricas

Exemplos de Equações	Características	Classificação
$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	Nenhum termo linear	Cone elíptico
$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	Um termo linear; dois termos quadráticos com o mesmo sinal	Paraboloide elíptico
$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$	Um termo linear; dois termos quadráticos com sinais opostos	Paraboloide hiperbólico

RESUMO

As equações dos elipsoides e hiperboloides podem ser reunidas em

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e conforme os sinais dos termos do 1º membro, apresentados nesta ordem, temos o seguinte quadro:

	sinais	ao longo do eixo
Elipsoide	+ + +	-----
Hiperboloide de uma folha	- + +	Ox
	+ - +	Oy
	+ + -	Oz
Hiperboloide de duas folhas	+ - -	Ox
	- + -	Oy
	- - +	Oz

REFERÊNCIAS

- WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. São Paulo. Makron Books, 2000
- BOULOS, P. & CAMARGO, I. Geometria Analítica - Um Tratamento Vetorial. 3a Ed. Pearson, 2005.