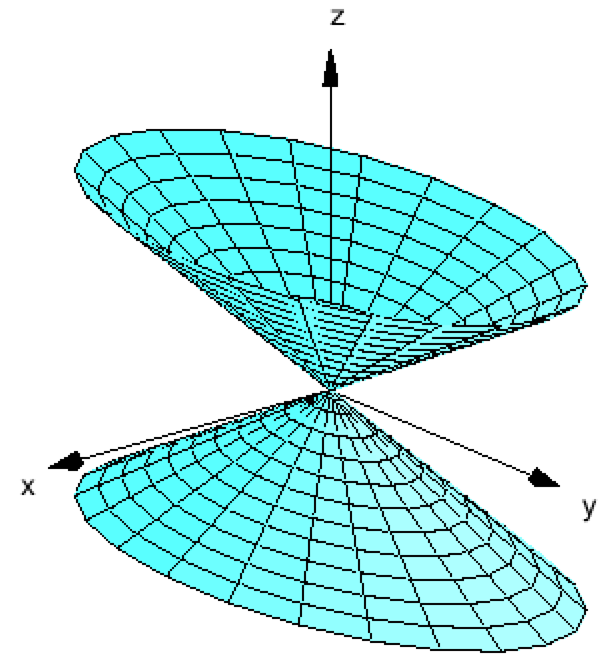
CÔNICAS

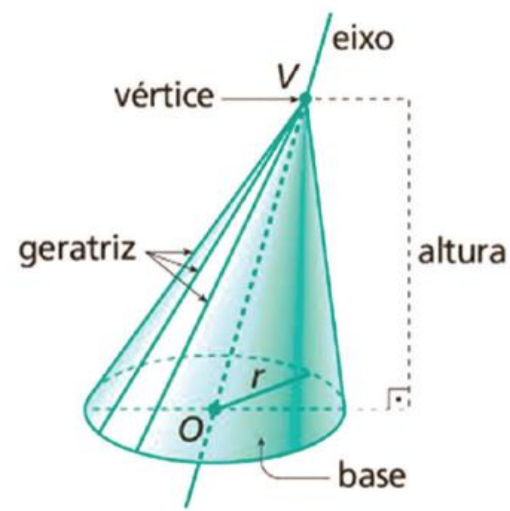
Geometria Analítica

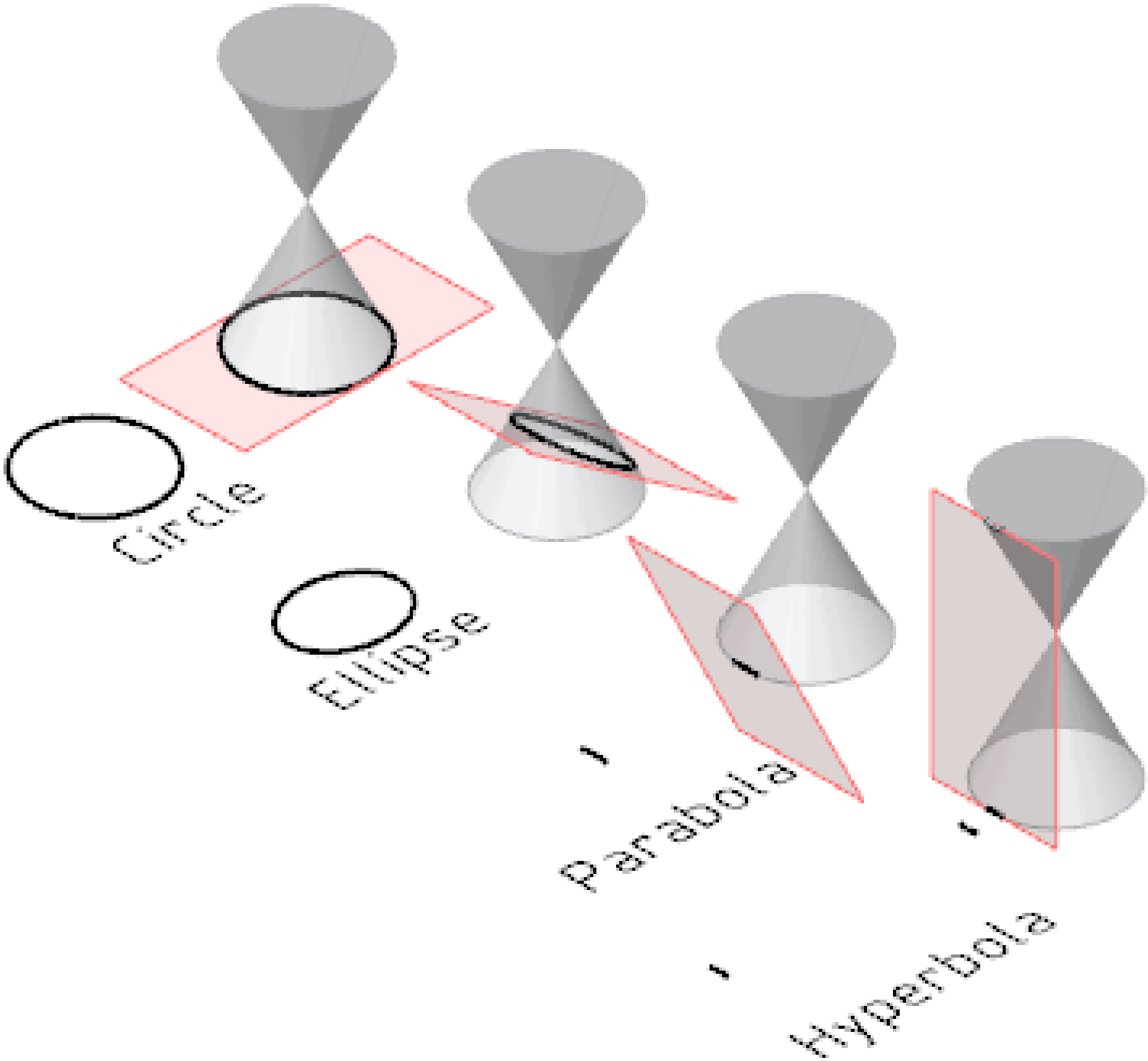
Prof. Dra. Luz Stefany Murcia-Correa
luz.m.correa@unesp.br

As Seções Cônicas

Uma **seção cônica**, ou simplesmente uma **cônica**, é uma curva obtida cortando-se qualquer cone de duas folhas por um plano que não passa pelo vértice do cone, chamado *plano secante*.

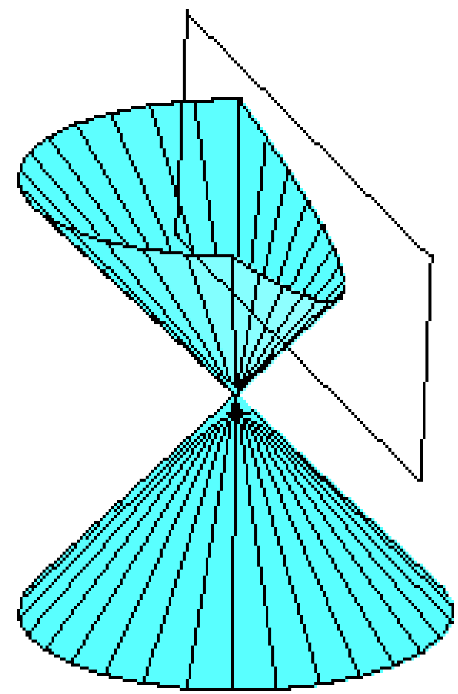





Circle
Ellipse
Parabola
Hyperbola

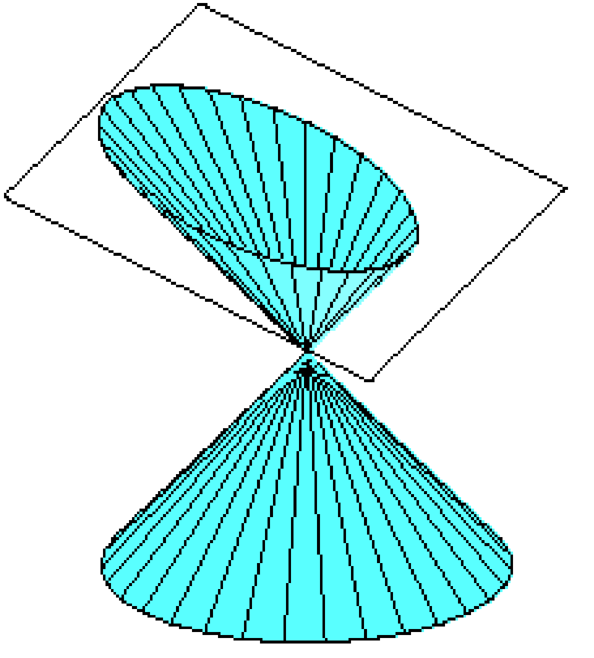
As Seções Cônicas

Se o plano secante for paralelo a uma geratriz do cone, a cônica é uma **parábola**.



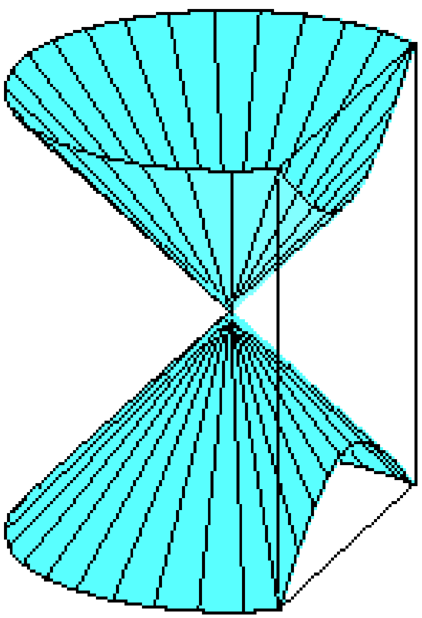
As Seções Cônicas

Se o plano secante não for paralelo a uma geratriz e cortar somente uma das folhas do cone, a cônica é uma **elipse**.



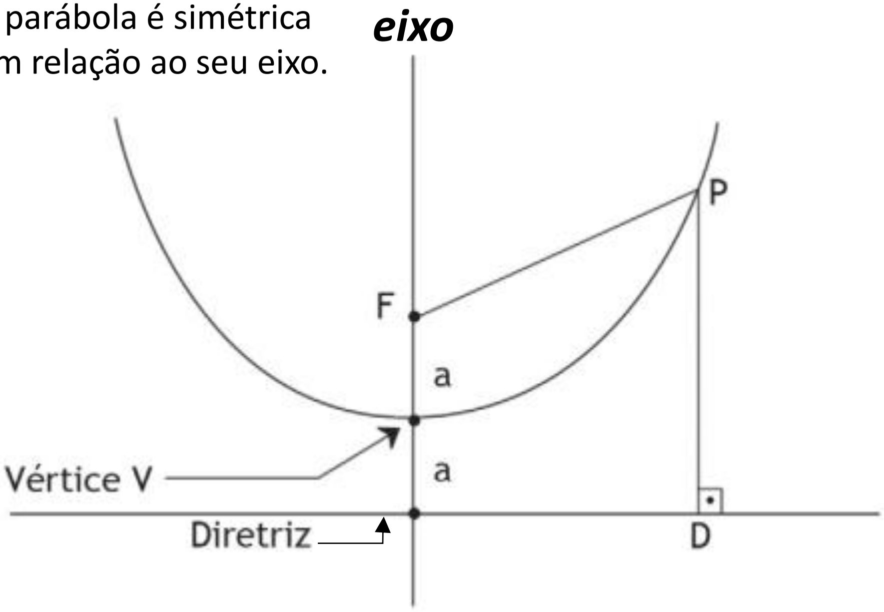
As Seções Cônicas

Se o plano secante não for paralelo a uma geratriz e cortar ambas as folhas do cone, a cônica é uma **hipérbole**.



PARÁBOLA

A parábola é simétrica em relação ao seu eixo.



Parábola é o conjunto de todos os pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo F e de uma reta fixa desse plano D.

d(P,F)=d(P,D)

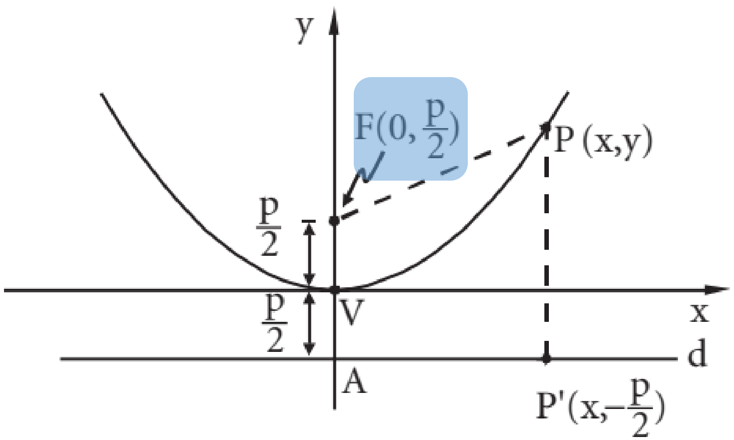
EQUAÇÕES REDUZIDAS DA PARÁBOLA

Seja a parábola de vértice V(0,0). Consideremos dois casos:

1) *O eixo da parábola é o eixo dos y.*
2) *O eixo da parábola é o eixo dos x.*

1) O eixo da parábola é o eixo dos y.

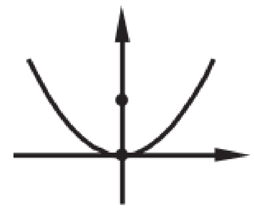
$$\left|\overrightarrow{FP}\right| = \left|\overrightarrow{P'P}\right|$$



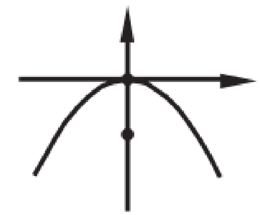
Diretriz: $y = -\frac{p}{2}$

$$x^2 = 2py$$

p: parâmetro da parábola. É a distância do vértice ao foco.

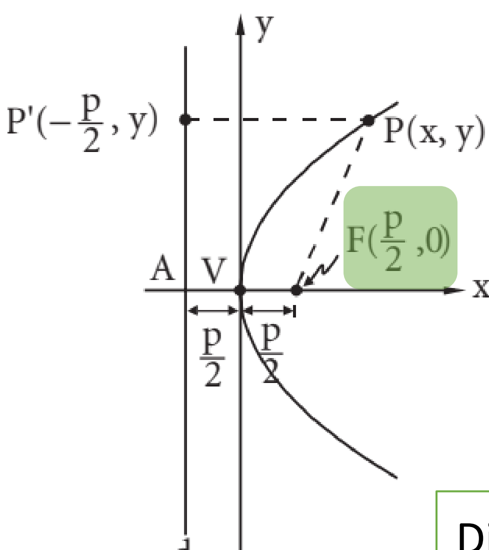


$y > 0$
$p > 0$



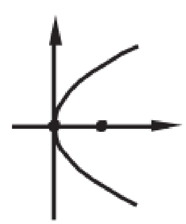
$y < 0$
$p < 0$

2) O eixo da parábola é o eixo dos x.

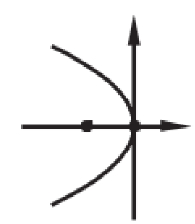


Diretriz: $x = -\frac{p}{2}$

$$y^2 = 2px$$



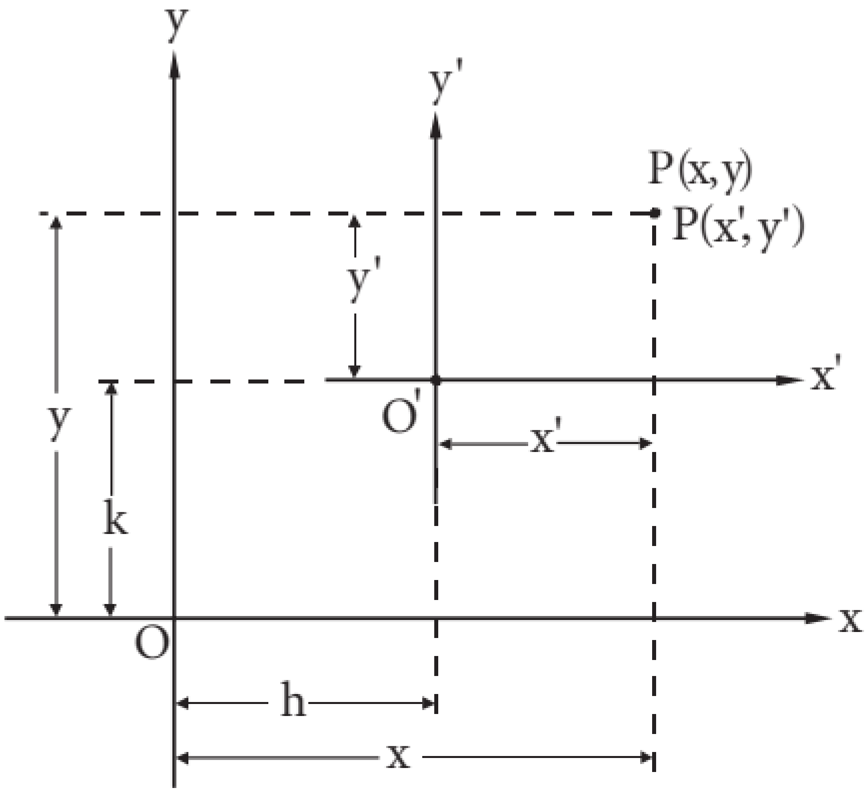
$x > 0$
$p > 0$



$x < 0$
$p < 0$

Exemplos!

TRANSLAÇÃO DE EIXOS DA PARÁBOLA

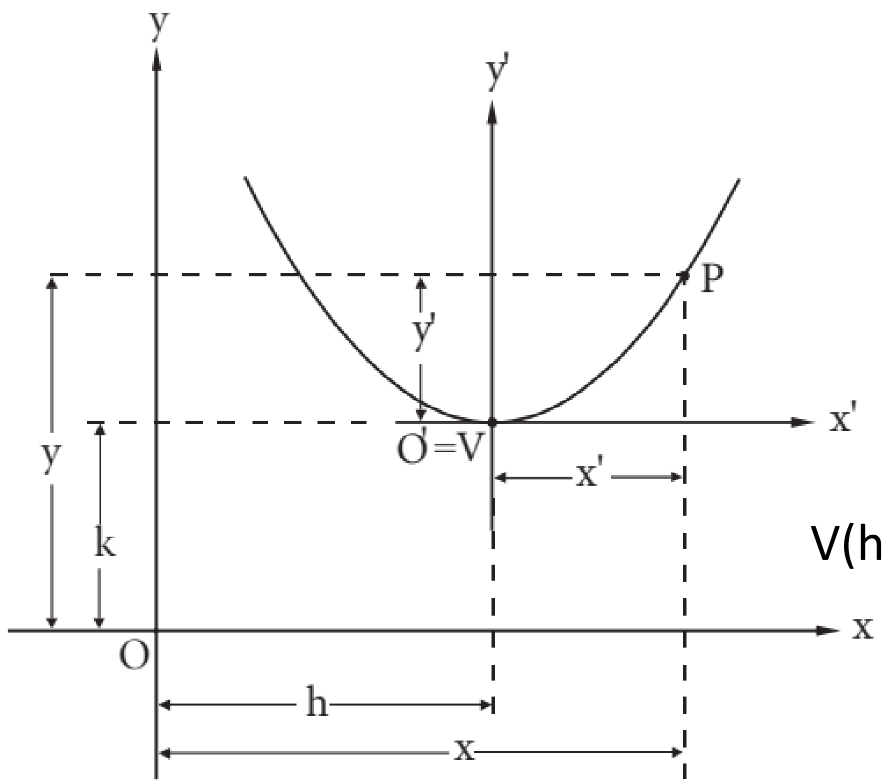


Fórmulas de translação:

$x = x' + h$ e $y = y' + k$

$x' = x - h$ e $y' = y - k$

OUTRAS FORMAS DA EQUAÇÃO DE PARÁBOLA



V(h,k)

O eixo da parábola é paralelo ao eixo dos *y*:

$$\boxed{(x-h)^2 = 2p(y-k)}$$

O eixo da parábola é paralelo ao eixo dos *x*:

$$\boxed{(y-k)^2 = 2p(x-h)}$$

Exemplos!

OUTRAS FORMAS DA EQUAÇÃO DE PARÁBOLA

Equação Geral da Parábola

$$\begin{cases} ax^2 + cx + dy + f = 0 \\ by^2 + cx + dy + f = 0 \end{cases}$$

Equação Explícita da Parábola

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \longrightarrow \text{Eixo paralelo ao eixo dos } y \\ x = ay^2 + by + c \longrightarrow \text{Eixo paralelo ao eixo dos x} \end{cases}$$

Equações Paramétricas da Parábola

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{1}{2p}t^2 \\[2ex] x = \dfrac{1}{2p}t^2 \\ y = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Exemplos!

Uma Técnica para Esboçar Parábolas

Siga os quatro passos básicos:

1. Determine se o eixo de simetria está ao longo do eixo x ou do eixo y. Se estiver ao longo do eixo x, então a equação tem um termo em y^2, caso contrário, a equação tem um termo em x^2.

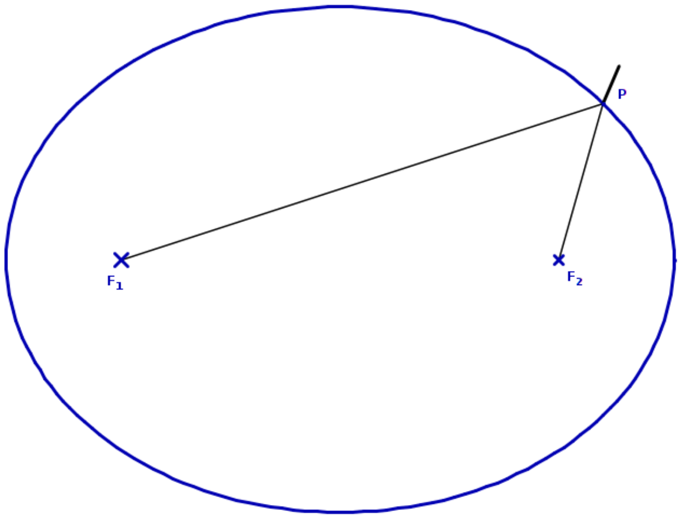
2. Determine em que lado a parábola se localiza em relação à diretriz: à direita, à esquerda, acima ou abaixo. Se o termo linear for positivo, então a parábola estará à direita ou acima da diretriz, caso contrário, ela estará à esquerda ou abaixo da diretriz.

3. Determine o valor de p e desenhe uma caixa que se amplie p unidades da origem ao longo do eixo de simetria em direção na qual a parábola abre e se estende 2p unidades, em cada lado do eixo de simetria.

4. Usando a caixa como guia, esboce a parábola de forma que o seu vértice esteja na origem e dois de seus pontos se localizem nos cantos da caixa.

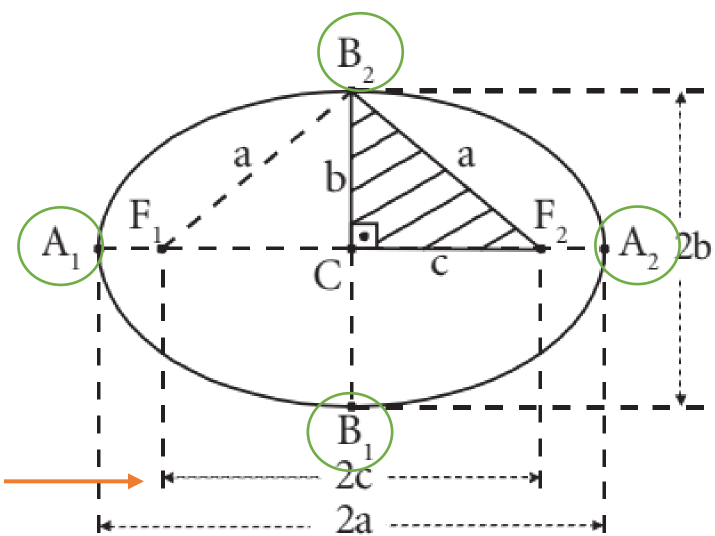
ELIPSE

Elipse é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja *soma das distâncias* a dois pontos fixos desse plano é constante.



$$\boxed{d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a}$$

Vértices



$$a^2 = b^2 + c^2$$

$\overline{A_1A_2}$ **Eixo maior**

$\overline{B_1B_2}$ **Eixo menor**

Distância focal

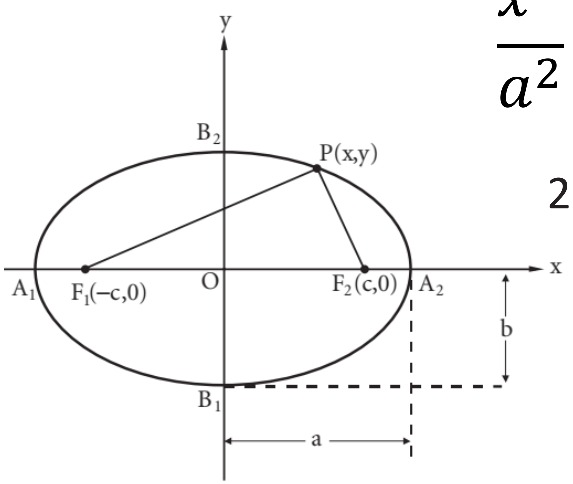
Excentricidade da elipse é o número real, $e = \frac{c}{a}$, $0 < e < 1$

Parâmetro responsável pela "forma" da elipse.

EQUAÇÕES REDUZIDAS DA ELIPSE

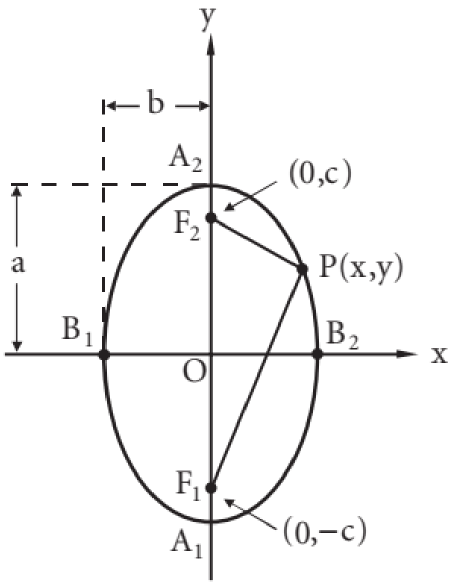
1) *O eixo maior está sobre o eixo dos x*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



2) *O eixo maior está sobre o eixo dos y*

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



Obs. Como em toda elipse tem-se a>b (ou $a^2>b^2$), para saber se a elipse tem seu eixo maior sobre Ox ou sobre Oy, basta *observar onde está o maior denominador* (a^2) na sua equação reduzida. Se esse for denominador de x^2, o eixo maior está sobre Ox. Caso contrário, estará sobre Oy.

Exemplos!

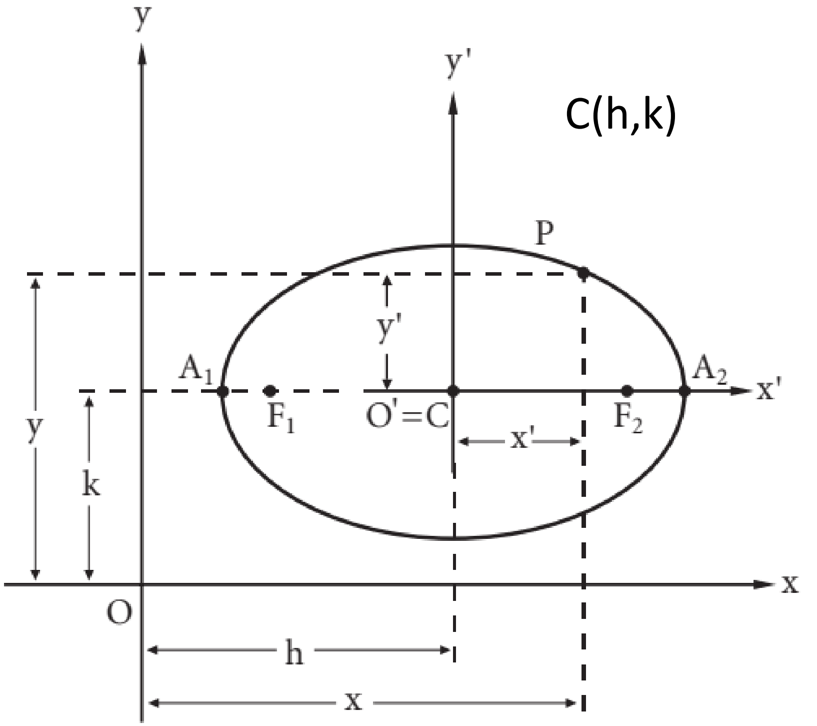
OUTRAS FORMAS DA EQUAÇÃO DA ELIPSE

1) *O eixo maior está sobre o eixo dos x*

Forma padrão $$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

2) *O eixo maior está sobre o eixo dos y*

Forma padrão $$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

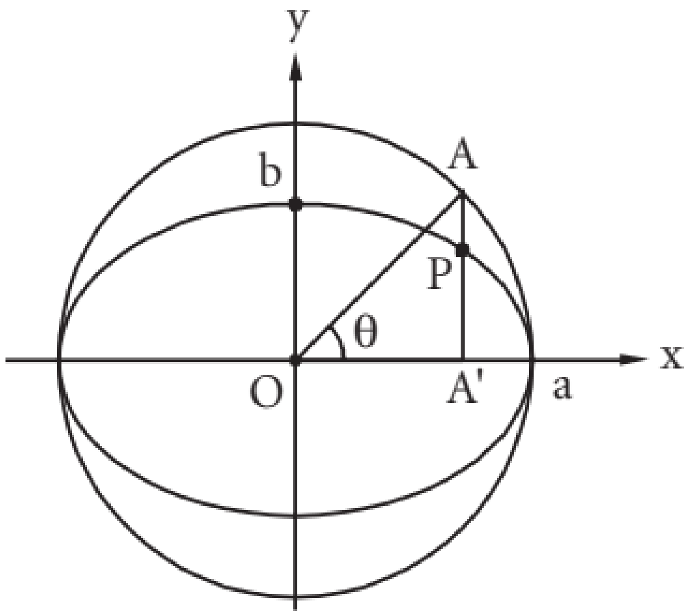


Equação Geral da Elipse $$ax^2+by^2+cx+dy+f=0$$

Exemplos!

Equações Paramétricas da Elipse

$$OA' = OAcos\theta = a\ cos\theta$$



$$x = a\ cos\theta \longrightarrow \frac{(a\ cos)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y = b\ sen\theta$$

$$\begin{cases} x = a\ cos\theta \\ y = b\ sen\theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Exemplos!

Observações:

1) No caso da elipse ser $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ (eixo maior sobre Oy), suas equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = b\cos\theta \\ y = a\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

2) Quando o centro da elipse for C(h, k), pela translação de eixos obtemos

$$\begin{cases} x-h = a\cos\theta \\ y-k = b\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = h + a\cos\theta \\ y = k + b\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \quad \text{(eixo maior paralelo a Ox)}$$

e

$$\begin{cases} x = h + b\cos\theta \\ y = k + a\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \quad \text{(eixo maior paralelo a Oy)}$$

REFERÊNCIAS

- WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. São Paulo. Makron Books, 2000

- BOULOS, P. & CAMARGO, I. Geometria Analítica - Um Tratamento Vetorial. 3a Ed. Pearson, 2005.