

**16-4** Sejam  $r: X = (1,0,2) + \lambda(2,1,3)$  e  $s: X = (0,1,-1) + \lambda(1,m,2m)$ . Estude, segundo os valores de  $m$ , a posição relativa de  $r$  e  $s$  e obtenha, quando for o caso, uma equação geral do plano determinado por elas.

**16-5** Estude, segundo os valores de  $m$  e  $n$ , a posição relativa das retas  $r$  e  $s$ . Obtenha, quando for o caso, uma equação geral do plano determinado por elas.

$$r: X = (1,m,0) + \lambda(1,2,1) \quad s: \begin{cases} x = z - 2 \\ y = nz - 1 \end{cases}$$

**16-6** Dê condições sobre  $m$  e  $n$  para que as retas  $r$  e  $s$  determinem um plano:

$$r: \begin{cases} x - y = 1 \\ nx - y - 2z + m + 1 = 0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x - nz + m + n = 0 \\ x + y - 2nz + 11 = 0 \end{cases}$$

**16-7** Mostre que as retas  $r$  e  $s$  determinam um plano  $\pi$  e obtenha uma equação geral de  $\pi$ .

(a)  $r: x - 1 = y = 2z$

$s: x - 1 = y = z$

(b)  $r: (x - 1)/2 = (y - 3)/3 = z/4$

$s: x/2 = y/3 = (z - 4)/4$

## B

## POSIÇÃO RELATIVA DE RETA E PLANO

Para uma reta  $r$  e um plano  $\pi$ , são três as possibilidades:  $r$  estar *contida* em  $\pi$ , ou serem *paralelos*, ou serem *transversais*. Neste último caso, a interseção de  $r$  e  $\pi$  reduz-se a um único ponto; no segundo caso, essa interseção é vazia; e para que  $r$  esteja contida em  $\pi$  é suficiente que dois de seus pontos, distintos, pertençam a  $\pi$ , caso em que  $r \cap \pi = r$ .

Para estudar a posição relativa de  $r$  e  $\pi$ , utilizaremos o seguinte fato básico:  $r$  é transversal a  $\pi$  se, e somente se, seu vetor diretor  $\vec{r}$  não é paralelo a  $\pi$  (equivalentemente,  $r$  é paralela a  $\pi$  ou está contida em  $\pi$  se, e somente se,  $\vec{r}$  é paralelo a  $\pi$ ). Lembremos que, para verificar se  $\vec{r}$  é paralelo a  $\pi$ , dispomos de dois recursos: tomar um par  $(\vec{u}, \vec{v})$  de vetores diretores de  $\pi$  e analisar a dependência linear da tripla  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{r})$  (veja a Definição 6-1 (c)), ou aplicar a Proposição 14-21.

Dados  $\vec{r} = (m, n, p)$  e  $\pi: ax + by + cz + d = 0$ , podemos então estudar a posição relativa de  $r$  e  $\pi$  seguindo o roteiro:

- Se  $am + bn + cp \neq 0$ ,  $r$  e  $\pi$  são transversais.
- Se  $am + bn + cp = 0$ ,  $r$  e  $\pi$  não são transversais. Para esclarecer se  $r$  está contida em  $\pi$  ou paralela a  $\pi$ , basta escolher um ponto  $A$  de  $r$  e verificar se ele pertence a  $\pi$ .

Por outro lado, se  $(\vec{u}, \vec{v})$  é um par de vetores diretores de  $\pi$ , podemos adotar um roteiro alternativo (veja a Figura 16-2):

- Se  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{r})$  é LI,  $r$  e  $\pi$  são transversais.
- Se  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{r})$  é LD,  $r$  e  $\pi$  não são transversais, e, como antes, saberemos se  $r$  está contida em  $\pi$  ou se  $r$  e  $\pi$  são paralelos verificando se um ponto escolhido em  $r$  pertence ou não a  $\pi$ .

Há também o “método da interseção”, que consiste em determinar  $r \cap \pi$  usando os procedimentos do Capítulo 15 e interpretar os resultados obtidos sob o ponto de vista da posição relativa.

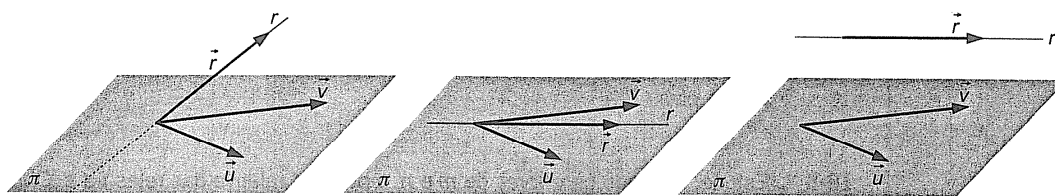


Figura 16-2

16-2

**Exercício  
Resolvido**

Estude a posição relativa de  $r$  e  $\pi$ :

$$(a) \ r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \pi: x + y - z + 2 = 0$$

$$(b) \ r: X = (1, 1, 0) + \lambda(1, -1, 1) \quad \pi: x + y - 2 = 0$$

$$(c) \ r: \begin{cases} 2x - y - z = 5 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases} \quad \pi: x + y + 4z = 4$$

**Resolução**

- (a) As equações de  $r$  mostram que  $\vec{r} = (1, -1, 1)$  é um vetor diretor de  $r$ , e a de  $\pi$  tem coeficientes  $a = 1, b = 1, c = -1, d = 2$ . Pela Proposição 14-21,  $r$  é transversal a  $\pi$ , pois

$$am + bn + cp = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = -1 \neq 0 \quad \blacktriangleleft$$

Se quisermos obter o ponto de interseção  $P$ , devemos resolver o sistema das equações de  $r$  e  $\pi$ ; usando a técnica do  $\lambda$ , chega-se rapidamente a  $P = (5, -3, 4)$ .

- (b) Um vetor diretor de  $r$  é  $\vec{r} = (1, -1, 1)$  e os coeficientes  $a, b, c$  da equação de  $\pi$  são, respectivamente, 1, 1, 0. Como

$$am + bn + cp = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = 0$$

$r$  é paralela a  $\pi$  ou está contida em  $\pi$ . Tomemos um ponto de  $r$ , por exemplo,  $A = (1, 1, 0)$ . Esse ponto verifica a equação de  $\pi$  e, portanto,  $r$  não pode ser paralela a  $\pi$ . Conclusão:  $r$  está contida em  $\pi$ .  $\blacktriangleleft$

- (c) A interseção  $r \cap \pi$  é o conjunto dos pontos cujas coordenadas satisfazem o sistema

$$\begin{cases} 2x - y - z = 5 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + 4z = 4 \end{cases}$$

O determinante dos coeficientes,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

é diferente de 0 (seu valor é  $-30$ ); logo, pelo Teorema de Cramer, a solução do sistema é única, o que nos leva a concluir que  $r$  e  $\pi$  são transversais. ◀

Se quisermos obter o ponto de interseção, devemos resolver o sistema. Faça isso, para obter  $P = (3,1,0)$ .

**16-3**

**Exercício Resolvido**

Estude a posição relativa de  $r$  e  $\pi$ .

- |                                       |   |
|---------------------------------------|---|
| (a) $r: X = (1,1,1) + \lambda(3,2,1)$ | $\pi: X = (1,1,3) + \lambda(1,-1,1) + \mu(0,1,3)$ |
| (b) $r: X = (2,2,1) + \lambda(3,3,0)$ | $\pi: X = (1,0,1) + \lambda(1,1,1) + \mu(0,0,3)$  |
| (c) $r: x - 2y = 3 - 2z + y = 2x - z$ | $\pi: X = (1,4,0) + \lambda(1,1,1) + \mu(2,1,0)$  |

**Resolução**

- (a)  $\vec{r} = (3,2,1)$  é vetor diretor de  $r$ ;  $\vec{u} = (1,-1,1)$  e  $\vec{v} = (0,1,3)$  são vetores diretores de  $\pi$ .  
A tripla  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{r})$  é LI, pois

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -17 \neq 0$$

Logo,  $r$  e  $\pi$  são transversais. ◀

- (b)  $\vec{r} = (3,3,0)$  é um diretor de  $r$ ;  $\vec{u} = (1,1,1)$  e  $\vec{v} = (0,0,3)$  são diretores de  $\pi$ . De

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

concluimos que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{r})$  é LD; portanto,  $r$  está contida em  $\pi$  ou é paralela a  $\pi$ . Tomemos um ponto de  $r$ , por exemplo,  $A = (5,5,1)$ , e verifiquemos se ele pertence a  $\pi$ , isto é, se existem  $\lambda$  e  $\mu$  tais que  $(5,5,1) = (1,0,1) + \lambda(1,1,1) + \mu(0,0,3)$ . Essa igualdade equivale ao sistema incompatível

$$\begin{cases} 5 = 1 + \lambda \\ 5 = \lambda \\ 1 = 1 + \lambda + 3\mu \end{cases}$$

Logo,  $A$  não pertence a  $\pi$  e, portanto,  $r$  é paralela a  $\pi$ .

(c) As equações de  $r$  podem ser escritas sob a forma equivalente

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 3 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Vamos proceder como no Exercício Resolvido 15-11 (segundo modo) para obter um vetor diretor de  $r$ .

- Se adotarmos para  $y$  o valor 0, o sistema fica

$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ x = z \end{cases}$$

e tem por solução  $x = z = 1$ . Logo,  $A = (1, 0, 1)$  é um ponto de  $r$ .

- Dando a  $x$  o valor 0, obtemos

$$\begin{cases} -3y + 2z = 3 \\ 2y = z \end{cases}$$

e, portanto,  $y = 3$  e  $z = 6$ . O ponto  $B = (0, 3, 6)$  pertence a  $r$ .

- Um vetor diretor de  $r$  é  $\vec{r} = \overrightarrow{AB} = (-1, 3, 5)$ .

Agora, repetimos o que foi feito nos itens (a) e (b):  $\vec{u} = (1, 1, 1)$  e  $\vec{v} = (2, 1, 0)$  são vetores diretores de  $\pi$ , e  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{r})$  é LI, pois

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2$$

Logo,  $r$  e  $\pi$  são transversais.

Uma resolução alternativa para os três itens é obter uma equação geral de  $\pi$  e proceder como no Exercício Resolvido 16-2.

### EXERCÍCIOS

**16-8** Estude a posição relativa de  $r$  e  $\pi$  e, quando forem transversais, obtenha o ponto de interseção  $P$ .

(a)  $r: X = (1, 1, 0) + \lambda(0, 1, 1)$

$\pi: x - y - z = 2$

(b)  $r: (x - 1)/2 = y = z$

$\pi: X = (3, 0, 1) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(2, 2, 0)$

(c)  $r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$

$\pi: X = (0, 1/2, 0) + \lambda(1, -1/2, 0) + \mu(0, 1, 1)$

$$(d) \begin{cases} r: & \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases} & \pi: x + y = 2 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} r: X = (0,0,0) + \lambda(1,4,1) & \pi: X = (1,-1,1) + \lambda(0,1,2) + \mu(1,-1,0) \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} r: (x+2)/3 = y-1 = (z+3)/3 & \pi: 3x - 6y - z = 0 \end{cases}$$

**16-9** Calcule  $m$  para que  $r$  seja paralela a  $\pi$ :

$$r: X = (1,1,1) + \lambda(2,m,1) \quad \pi: X = (0,0,0) + \lambda(1,2,0) + \mu(1,0,1)$$

**16-10** Calcule  $m$  e  $n$  para que  $r$  esteja contida em  $\pi$ .

$$(a) \begin{cases} r: X = (n,2,0) + \lambda(2,m,m) & \pi: x - 3y + z = 1 \\ (b) r: X = (m,3,n) + \lambda(1,1,n) & \pi: nx - ny + mz = 1 \end{cases}$$

**16-11** Para que valores de  $m$  a reta  $r: (x-1)/m = y/2 = z/m$  é transversal ao plano  $\pi: x + my + z = 0$ ?

**16-12** Sejam  $r: X = (n,2,0) + \lambda(2,m,n)$  e  $\pi: nx - 3y + z = 1$ . Usando, em cada caso, a informação dada, obtenha condições sobre  $m$  e  $n$ .

(a)  $r$  e  $\pi$  são paralelos. (b)  $r$  e  $\pi$  são transversais. (c)  $r$  está contida em  $\pi$ .

**16-13** A reta  $t$  é paralela a  $Oxz$ , está contida em  $\pi: x + 2y - z = 2$ , e é concorrente com  $s$ . Obtenha uma equação vetorial de  $t$ , nos casos:

$$(a) s: X = (2,1,1) + \lambda(1,0,2) \quad (b) s: X = (2,1,1) + \lambda(0,1,1)$$

**16-14** Nos itens do Exercício 16-1 em que  $r$  e  $s$  são reversas, obtenha uma equação geral do plano que contém  $r$  e é paralelo a  $s$ .

## C

## POSIÇÃO RELATIVA DE PLANOS

As possibilidades para dois planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são: serem *paralelos distintos*, ou *paralelos coincidentes* (isto é, iguais), ou *transversais*. Neste último caso, sua interseção é uma reta; no primeiro, é vazia; e no segundo, um plano ( $\pi_1 \cap \pi_2 = \pi_1 = \pi_2$ ). Assim, se você obtiver, pelos métodos estudados no Capítulo 15, a interseção de  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , poderá descrever a sua posição relativa. Vamos procurar agora outros caminhos.

Quando os planos são descritos por equações na forma geral, podemos obter informações sobre a posição relativa analisando os coeficientes dessas equações, como veremos na Proposição 16-4. Para que você tenha uma idéia da praticidade do processo, eis alguns exemplos de como se aplica essa proposição.

- Os planos  $\pi_1: 2x - 3y + z - 4 = 0$  e  $\pi_2: 6x - 9y + 3z - 12 = 0$  são iguais, porque os coeficientes  $2, -3, 1, -4$  e  $6, -9, 3, -12$  são proporcionais.
- Os planos  $\pi_1: 2x - 3y + z - 4 = 0$  e  $\pi_2: 6x - 9y + 3z + 5 = 0$  são paralelos distintos, porque os coeficientes  $2, -3, 1$  e  $6, -9, 3$  são proporcionais, mas os termos independentes,  $-4$  e  $5$ , não estão na mesma proporção.