RETAS E PLANOS

Geometria Analítica

Prof. Dra. Luz Stefany Murcia-Correa

luz.m.correa@unesp.br

REVISÃO E RESUMO: RETAS

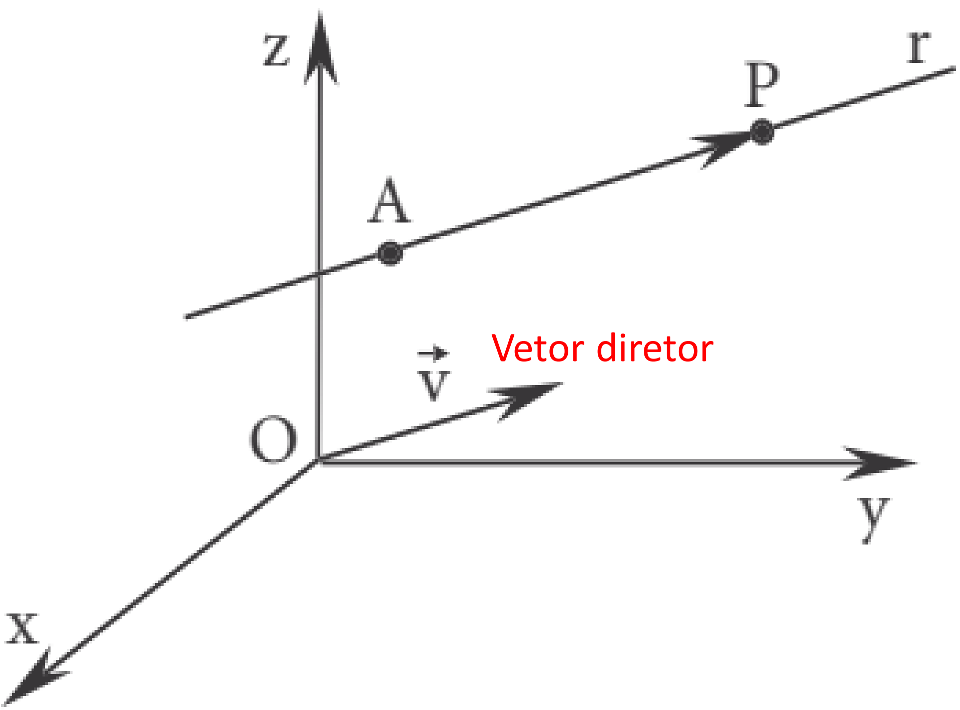
EQUAÇÃO VETORIAL DA RETA

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$$

$$P = A + t\vec{v}$$

t: parâmetro

$$\boxed{(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)}$$



EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DA RETA

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$

$$(x, y, z) = (x_1 + at, y_1 + bt, z_1 + ct),$$

$$\boxed{\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}}$$

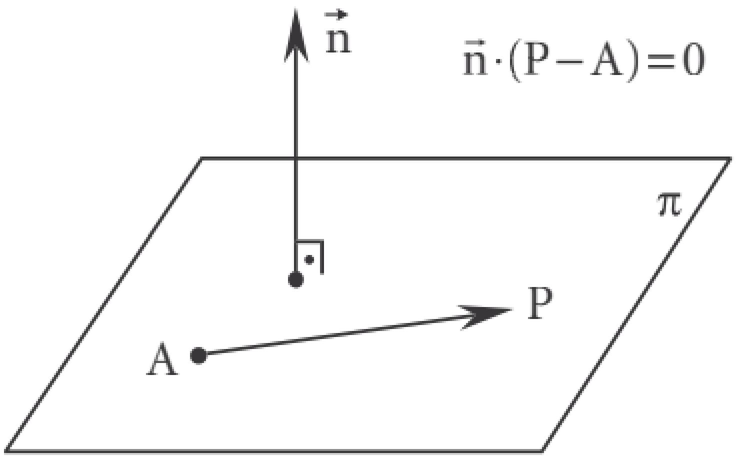
EQUAÇÕES SIMÉTRICAS DA RETA

$$\boxed{\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}}$$

REVISÃO E RESUMO: PLANOS

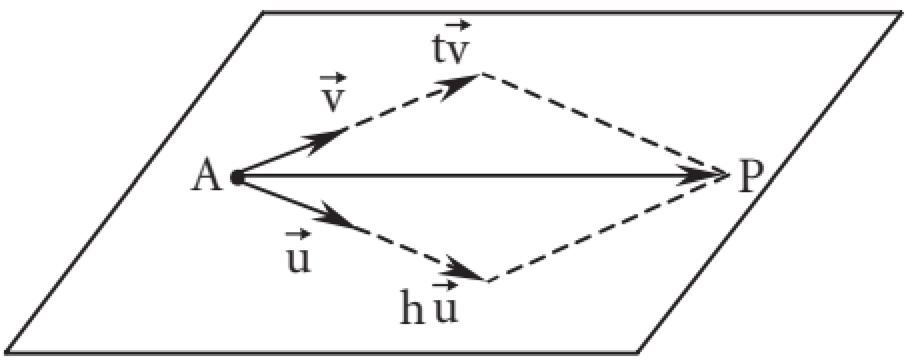
EQUAÇÃO GERAL DO PLANO

$$ax + by + cz + d = 0$$



EQUAÇÃO VETORIAL DE UM PLANO (em coordenadas)

$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+h(a_1,b_1,c_1)+t(a_2,b_2,c_2), \quad h,t\in\mathbb{R}$$



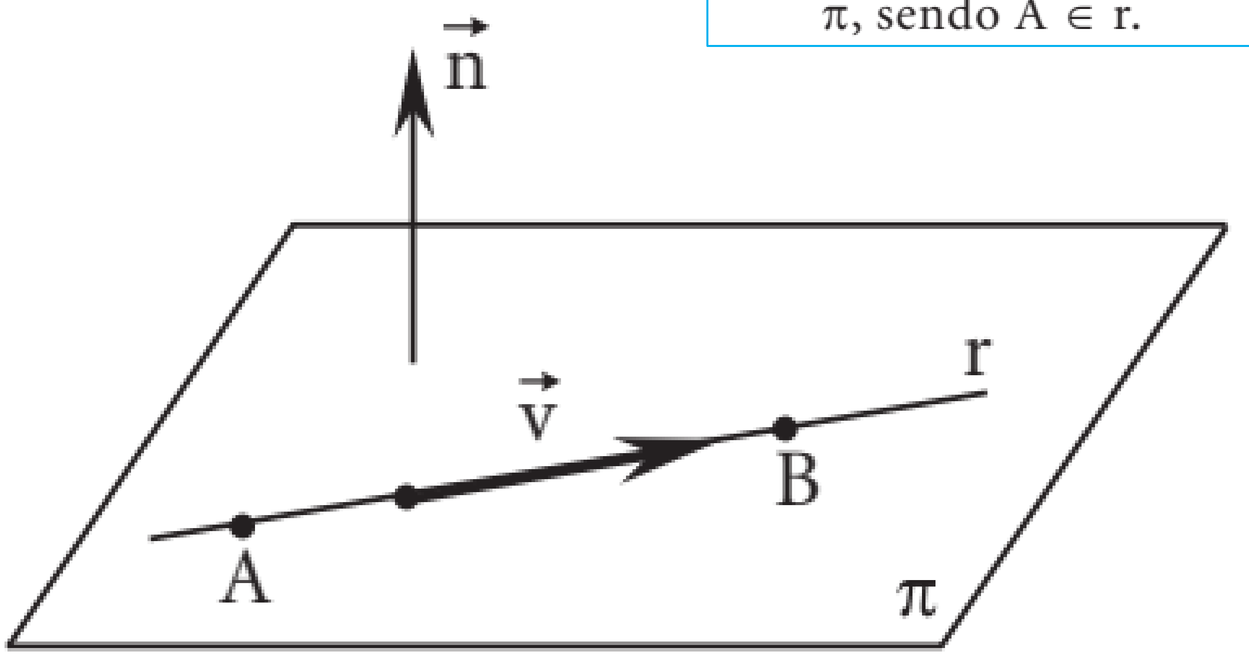
$$\begin{cases} x = x_0 + a_1h + a_2t \\ y = y_0 + b_1h + b_2t \\ z = z_0 + c_1h + c_2t, \quad h,t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DE π

RETA CONTIDA EM UM PLANO

I) dois pontos A e B de r forem também de π ou

II) $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, em que $\vec{v}$ é um vetor diretor de r e $\vec{n}$ um vetor normal a π e $A \in \pi$, sendo $A \in r$.

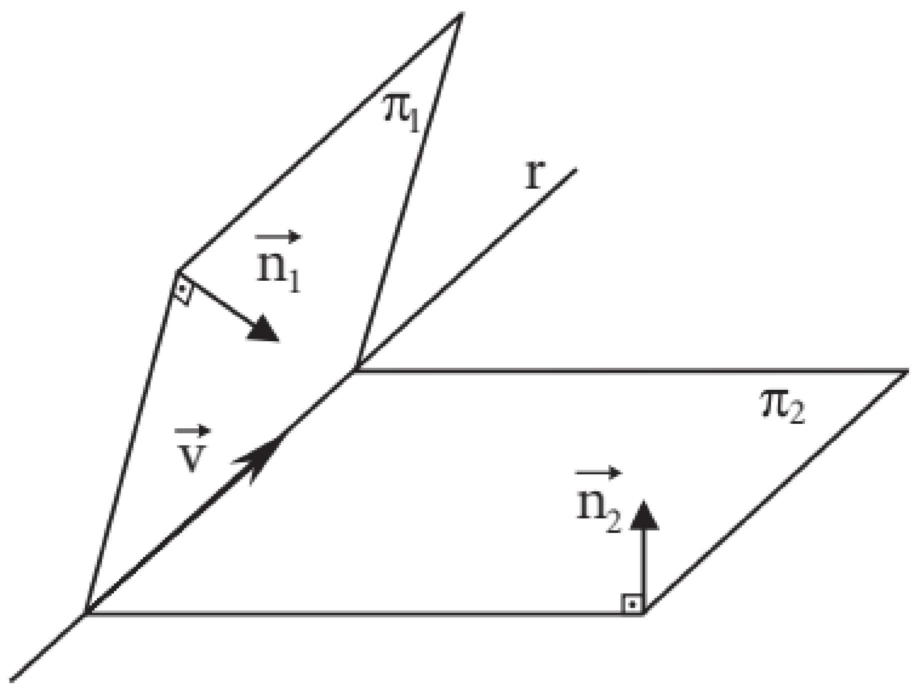


INTERSEÇÃO DE DOIS PLANOS

A interseção de dois planos é uma reta *r* contida nos dois planos.

1) Como r está contida nos dois planos, as coordenadas de qualquer ponto $(x,y,z) \in r$ devem satisfazer, simultaneamente, as equações dos dois planos.

2) Outra maneira de obter equações de r é determinar um de seus pontos e um vetor diretor.



PROBLEMAS:

1. Estabelecer equações reduzidas na variável x da reta de interseção dos planos:

$\pi_1: 3x - y + 2z - 1 = 0$ e $\pi_2: x + 2y - 3z - 4 = 0$

2. Encontrar equações paramétricas da reta de interseção dos planos:

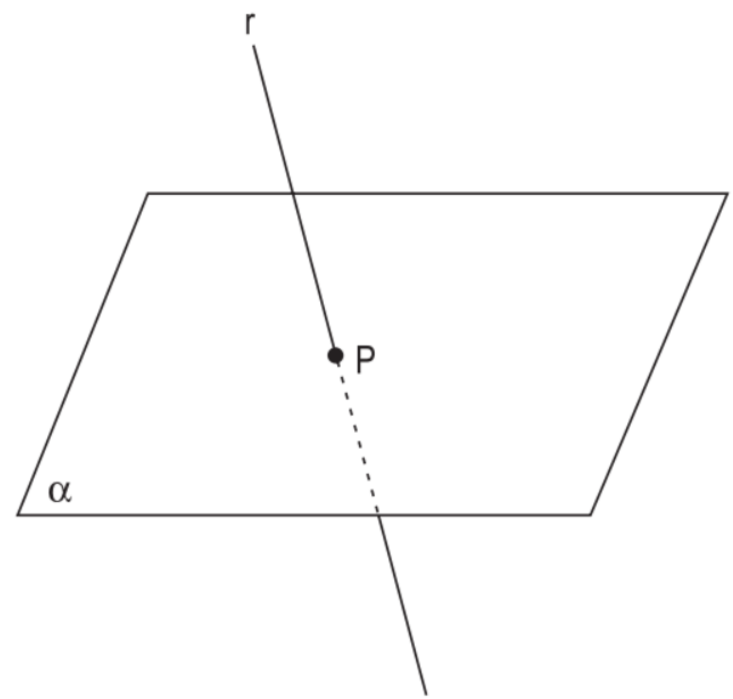
$\pi_1: 3x + y - 3z - 5 = 0$ e $\pi_2: x - y - z - 3 = 0$

INTERSEÇÃO DE RETA COM PLANO

Sejam:

α: $ax + by + cz + d = 0$ (1)

$$r: \begin{cases} x = x_O + \ell t \\ y = y_O + mt \\ z = z_O + nt \end{cases} \quad (2)$$



onde a reta não é paralela ao plano.

Se o ponto $P = (x, y, z)$ é o ponto de interseção da reta com o plano, suas coordenadas devem verificar as equações do sistema formado por (1) e (2).

EXEMPLO:

1. Determinar o ponto de interseção da reta r com o plano π, em que

$$r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi: 2x - y + 3z - 4 = 0$$

SOLUÇÃO:

Qualquer ponto de r é da forma $(x, y, z) = (-1 + 2t, 5 + 3t, 3 - t)$. Se um deles é comum com o plano π, suas coordenadas verificam a equação de π

$$2(-1 + 2t) - (5 + 3t) + 3(3 - t) - 4 = 0 \longrightarrow t = -1.$$

Substituindo esse valor nas equações de r obtém-se

$$x = -1 + 2(-1) = -3 \qquad y = 5 + 3(-1) = 2 \qquad z = 3 - (-1) = 4$$

Logo, a interseção de r e π é o ponto $(-3, 2, 4)$.

PROBLEMA:

Determinar o ponto de interseção da reta *r* com o plano π.

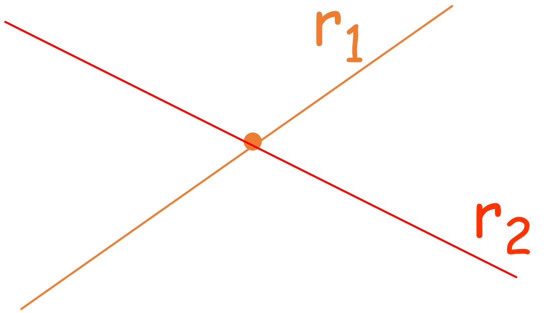
(a) $r: x = 3t, y = 1 - 2t, z = -t$ e $\pi: 2x + 3y - 2z - 7 = 0$

SOLUÇÃO: I(6, -3, -2)

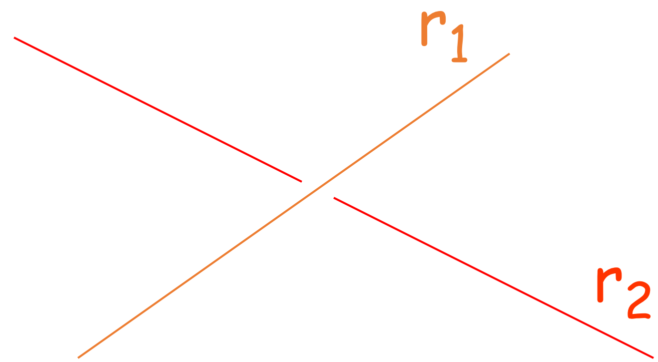
(b) $r: \begin{cases} x = 4 + k \\ y = 3 + 2k \\ z = -2 - 3k \end{cases}$ e $\pi: \begin{cases} x = 2 + h + 2t \\ y = -3 - h - t \\ z = 1 + 3h - 3t \end{cases}$

SOLUÇÃO: I(1, -3, 7)

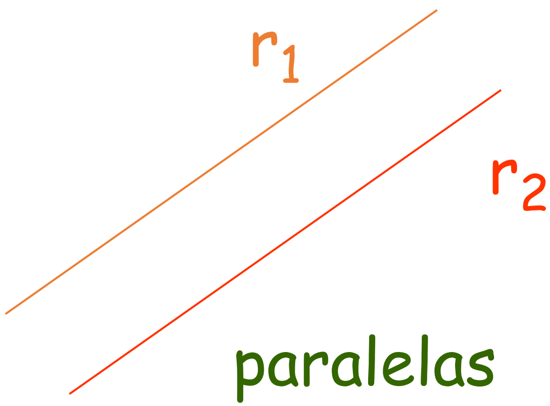
Posições Relativas de Retas em 3-D



concorrentes



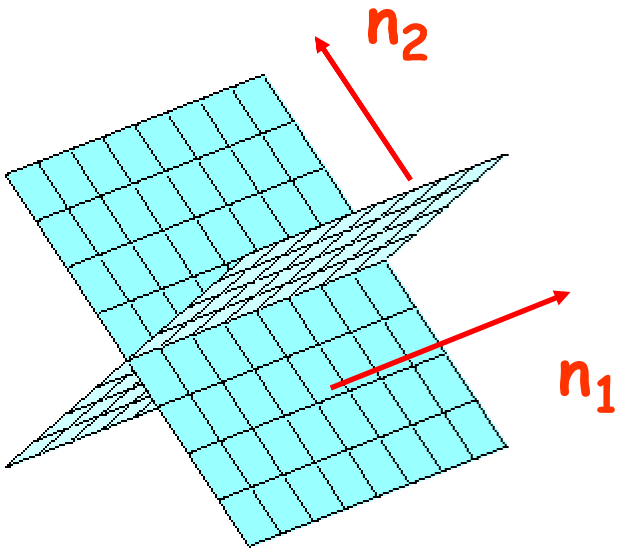
reversas

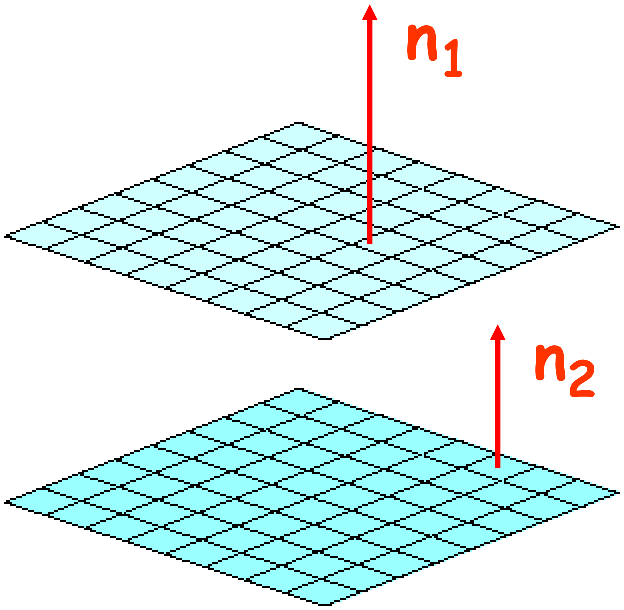


paralelas

coincidentes

Posições Relativas de Planos





planos concorrentes:

$\mathbf{n_1}$ não é paralelo a $\mathbf{n_2}$

planos paralelos:

$\mathbf{n_1}$ é paralelo a $\mathbf{n_2}$

POSIÇÃO RELATIVA DE RETA E PLANO

1. A reta *r* estar *contida* em π. → Para que r esteja contida em π é suficiente que dois de seus pontos, distintos, $\in \pi$, caso em que $r \cap \pi = r$.

2. Serem paralelos. → $(r \cap \pi = \emptyset)$

3. Serem transversais. → A interseção de *r* e π reduz-se a um único ponto.

Dados o vetor diretor $\vec{v} = (m, n, p)$ e $\pi: ax + by + cz + d = 0$, podemos então estudar a posição relativa de *r* e π **seguindo o roteiro**:

- Se $am + bn + cp \neq 0$, *r* e π são transversais.
- Se $am + bn + cp = 0$, *r* e π não são transversais. Para esclarecer se *r* está contida em π ou é paralela a π, basta escolher um ponto A de *r* e verificar se ele pertence a π.

EXEMPLOS:

1. Estude a posição relativa de r e π:

(a) $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ $\qquad \pi: x + y - z + 2 = 0$

(b) $r: X = (1,1,0) + \lambda(1,-1,1)$ $\qquad \pi: x + y - 2 = 0$

2. Estude a posição relativa de r e π.

(a) $r: X = (1,1,1) + \lambda(3,2,1)$ $\qquad \pi: X = (1,1,3) + \lambda(1,-1,1) + \mu(0,1,3)$

REFERÊNCIAS

- WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. São Paulo. Makron Books, 2000
- BOULOS, P. & CAMARGO, I. Geometria Analítica - Um Tratamento Vetorial. 3a Ed. Pearson, 2005.