Cálculo Diferencial e Integral III (CDI-III)

Resolução Completa – Avaliação P1

Questão 1(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{4n^2 - 25}$$

Começamos fatorando o denominador como diferença de quadrados:

$$4n^2 - 25 = (2n)^2 - 5^2 = (2n - 5)(2n + 5)$$

Isso permite escrever o termo geral como soma de frações parciais:

$$\frac{-2}{(2n - 5)(2n + 5)} = \frac{A}{2n - 5} + \frac{B}{2n + 5}$$

Multiplicando pelo denominador:

$$-2 = A(2n + 5) + B(2n - 5)$$

Expandindo:

$$-2 = (2A + 2B)n + (5A - 5B)$$

Igualando coeficientes:

$$2A + 2B = 0 \Rightarrow A = -B$$

$$5A - 5B = -2$$

Substituindo:

$$5(-B) - 5B = -2 \Rightarrow -10B = -2 \Rightarrow B = \frac{1}{5}$$

Logo:

$$A = -\frac{1}{5}$$

Substituindo:

$$\frac{-2}{4n^2 - 25} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2n + 5} - \frac{1}{2n - 5}\right)$$

Agora escrevemos alguns termos:

$$n=1: \ \frac{1}{7}-\frac{1}{-3}$$

$$n=2: \ \frac{1}{9}-\frac{1}{-1}$$

$$n=3: \ \frac{1}{11}-\frac{1}{1}$$

$$n=4: \ \frac{1}{13}-\frac{1}{3}$$

Observa-se cancelamento telescópico. A soma parcial fica:

$$S_N = \frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2N+5}\right)$$

Tomando o limite:

$$S = \frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{15}$$

$$\boxed{\frac{4}{15}}$$

Questão 1(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}$$

Definimos:

$$a_n = \frac{n}{4^n}$$

Aplicamos o teste da razão:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{n} = \frac{n+1}{4n}$$

Calculando o limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{4n} = \frac{1}{4}$$

Como é menor que 1, a série converge.

$$\boxed{\text{Converge}}$$

Questão 2

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

Utilizamos o teste da integral:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

Fazendo $u = \ln x$, temos $du = \frac{dx}{x}$, então:

$$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u}$$

Como $-\frac{1}{\ln x} \to 0$ quando $x \to \infty$, a integral converge.
Logo, a série converge.

$$\boxed{\text{Converge}}$$

Questão 3

$$f(x) = \frac{3-x}{1+2x}$$

Escrevemos:

$$\frac{1}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n$$

Multiplicando por $3 - x$:

$$(3-x)\sum(-2x)^n$$

Distribuindo:

$$3\sum(-2x)^n - x\sum(-2x)^n$$

Calculando os primeiros termos:

$$3 - 6x + 12x^2 - 24x^3$$

$$-x + 2x^2 - 4x^3$$

Somando:

$$3 - 7x + 14x^2 - 28x^3 + \cdots$$

Forma geral:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \left(3(-2)^n - (-2)^{n-1}\right) x^n}$$

Questão 4

$$x = 21{,}365365365\ldots$$

Separando:

$$x = 21 + y$$

$$y = 0{,}365365\ldots$$

Escrevendo como série geométrica:

$$y = \frac{365}{1000} + \frac{365}{1000^2} + \cdots$$

$$= 365 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000^n}$$

Soma da série:

$$= 365 \cdot \frac{1}{999}$$

Logo:

$$x = 21 + \frac{365}{999} = \frac{21344}{999}$$

$$\boxed{\frac{21344}{999}}$$

Questão 5

$$\int_0^1 \cos(x^3)\, dx$$

Começamos pela definição da série de Maclaurin:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Para $f(x) = \cos(x)$, calculamos as derivadas:

$$\cos(x),\ -\sin(x),\ -\cos(x),\ \sin(x),\ \cos(x), \ldots$$

Avaliando em $x = 0$:

$$1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ \dots$$

Substituindo na fórmula:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Forma geral:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Agora substituímos $x \to x^3$:

$$\cos(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^3)^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{6n}}{(2n)!}$$

Integramos termo a termo:

$$\int_0^1 x^{6n} dx = \frac{1}{6n+1}$$

Logo:

$$\int_0^1 \cos(x^3)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(6n+1)}$$

Calculando os primeiros termos:

$$1 - \frac{1}{14} + \frac{1}{312} - 0.000073 \approx 0.9317$$

$$\boxed{0.9317}$$