

# Cálculo Diferencial e Integral III

## Resolução – Séries de Potência e Teste da Raiz

### Exercício 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+1}{3n+2} \right)^n$$

Aplicando o teste da raiz:

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2n+1}{3n+2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3} < 1$$

Logo, a série converge.

**Comentário pedagógico:** O teste da raiz é particularmente eficiente quando o termo geral está elevado a  $n$ .

### Exercício 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$$

Logo, a série converge.

**Comentário pedagógico:** Sempre reduza frações racionais dividindo pelo maior grau de  $n$ .

### Exercício 3

$$\frac{1}{(1-x)^2}$$

Partindo da série geométrica:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Derivando:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

Reindexando:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

**Comentário pedagógico:** Derivar séries é uma ferramenta central para gerar novas representações.

## Exercício 4

$$\frac{x}{(1-x)^2}$$

Multiplicando por  $x$ :

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

**Comentário pedagógico:** Multiplicação por  $x$  desloca os índices da série.

## Exercício 5

$$f(x) = xe^x$$

Sabemos:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Logo:

$$xe^x = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + \dots$$

### Aproximação em $x = 0.5$

$$f(0.5) \approx 0.5 + 0.25 + 0.0625 + 0.0104 = 0.8229$$

Valor exato:

$$0.5e^{0.5} \approx 0.82435$$

Erro:

$$\approx 0.00145$$

**Comentário pedagógico:** Séries de potência são extremamente eficazes para aproximações numéricas.

## Exercício 6

$$\frac{x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

**Comentário pedagógico:** Toda manipulação começa com a série geométrica.

## Exercício 7

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{9+x^2} \\ &= \frac{x}{9} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{9}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \end{aligned}$$

**Comentário pedagógico:** Transformar a função na forma  $\frac{1}{1+u}$  é uma estratégia padrão.

## Exercício 8

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots$$

**Comentário pedagógico:** Separar em frações simples facilita o uso da série geométrica.

## Exercício 9

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{3-x^3} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{3^{n+1}} \end{aligned}$$

**Comentário pedagógico:** Identifique padrões do tipo  $1/(1 - u)$  para expandir em série.

## Exercício 10

$$\int_0^{0.2} \frac{1}{1+x^3} dx$$

Expansão:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n}$$

Integração:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$$

Aproximação com três termos:

$$0.2 - 0.0004 + 0.0000018 \approx 0.1996$$

**Comentário pedagógico:** Integração termo a termo é válida dentro do intervalo de convergência.