Cálculo Diferencial e Integral III
Resolução – Lista 03

Exercício 1

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

Considere a função:

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}, \quad x \geq 2$$

A função é positiva, contínua e decrescente. Aplicamos o teste da integral:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

Faça $u = \ln x$, então $du = \frac{dx}{x}$:

$$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u}$$

$$\lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}$$

Logo, a integral converge e a série converge.

Comentário pedagógico: este é um exemplo clássico de série hiperharmônica convergente.

Exercício 2

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

Aplicando o teste da integral:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$$

Substituição $u = \ln x$:

$$\int \frac{du}{u} = \ln u = \ln(\ln x)$$

$$\lim_{b\to\infty} \ln(\ln b) = \infty$$

Logo, a série diverge.

Comentário pedagógico: este é o caso crítico entre convergência e divergência.

Exercício 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Decomposição:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Soma parcial:

$$S_N = 1 - \frac{1}{N+1}$$

$$\lim_{N\to\infty} S_N = 1$$

Logo, a série converge.
Comentário pedagógico: identificar estrutura telescópica é essencial.

Exercício 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$S_N = \frac{1}{2} - \frac{1}{N+2}$$

$$\lim S_N = \frac{1}{2}$$

Logo, converge.
Comentário pedagógico: variação da telescópica clássica.

Exercício 5

Mesma análise do exercício 1.
Logo, converge.
Comentário pedagógico: reforço intencional de técnica.

Exercício 6

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2 + 1}$$

Comparação limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n(\ln n)^2+1}}{\frac{1}{n(\ln n)^2}} = 1$$

Como a série comparativa converge, esta também converge.
Comentário pedagógico: exemplo importante de comparação assintótica.

Exercício 7

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+n}$$

$$\sim \frac{1}{n}$$

Como a série harmônica diverge, esta diverge.
Comentário pedagógico: análise assintótica é a chave.

Exercício 8

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n}$$

$$\sim \frac{1}{n}$$

Logo, diverge.
Comentário pedagógico: evitar manipulação desnecessária.

Exercício 9

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Teste da razão:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$\to e^{-1}$$

Como $e^{-1} < 1$, a série converge.
Comentário pedagógico: ligação importante com limites exponenciais.

Exercício 10

$$M = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

Converge, logo M é finita.

Interpretação

A massa total acumulada é limitada, indicando que o sistema tende à estabilização.

Comentário pedagógico: conexão fundamental entre matemática e modelagem ambiental.