ΣεmC

ε - learning

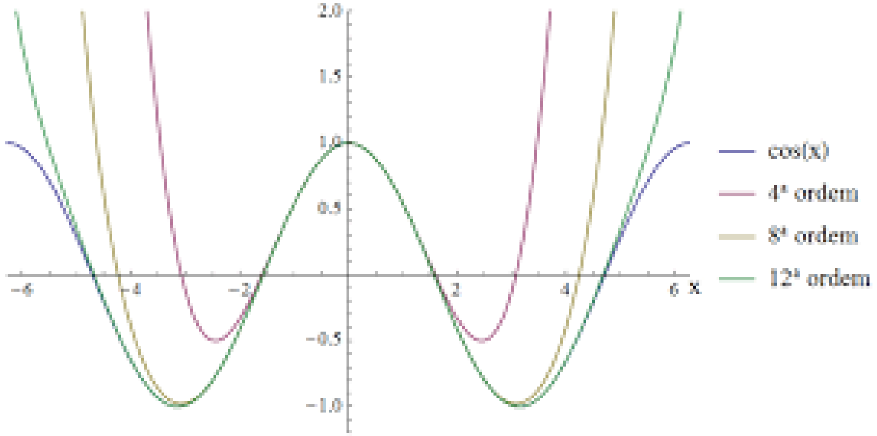
Σstudando εm ℂasa

Prof. Jorge Formiga

Série Numérica

$$\sin\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$



$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots;$$

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots;$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

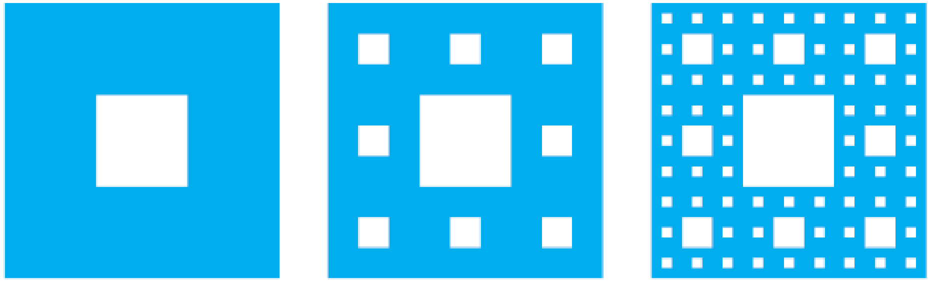
Imagine

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\cdots$$

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288\ldots$$

Uma certa bola tem a seguinte propriedade: cada vez que cai a partir de uma altura h em uma superfície dura e nivelada, ela volta até uma altura rh, onde $0 < r < 1$. Suponha que a bola seja lançada de uma altura inicial de H metros.

O tapete de Sierpinski (corresponde ao conjunto de cantor bidimensional)



Recordar :SEQUÊNCIA NUMÉRICA

Uma lista de números escritos em uma ordem definida

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

Notação : sequência $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots\}$ é também indicada por

$$\{a_n\} \quad \text{ou} \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Definição

O que queremos dizer quando expressamos um número como um decimal infinito?

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288\ldots$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{2}{10^6} + \frac{6}{10^7} + \frac{5}{10^8} + \cdots$$

Em geral, se tentarmos somar os termos de uma sequência infinita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

que é denominada uma **série infinita** (ou apenas **série**)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{ou} \qquad \sum a_n$$

Construindo

Faz sentido falar sobre a soma de uma quantidade infinita de termos?

Seria impossível encontrar uma soma finita para a série

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n + \cdots$$

porque, se começarmos adicionando os termos, obteremos as somas cumulativas 1, 3, 6, 10, 15, 21,...

Contudo, se começarmos a somar os termos da série

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

obtemos $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \ldots, 1 - 1/2^n, \ldots$

Construindo

n	Soma dos n primeiros termos
1	0,50000000
2	0,75000000
3	0,87500000
4	0,93750000
5	0,96875000
6	0,98437500
7	0,99218750
10	0,99902344
15	0,99996948
20	0,99999905
25	0,99999997

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

obtemos $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \ldots, 1 - 1/2^n, \ldots$

De fato, somando um número suficiente de termos da série, podemos fazer as somas parciais se tornarem tão próximas quanto quisermos de 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

Consideramos as **somas parciais**

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Construindo

Consideramos as **somas parciais**

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

obtemos $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \ldots, 1 - 1/2^n, \ldots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

Essas somas parciais formam uma nova sequência $\{s_n\}$, que pode ou não ter um limite.

Se existir então,

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s$$

o chamamos soma da série infinita $\Sigma\, a_n$

Construindo

$\varepsilon\mathcal{E}m\mathbb{C}$ ε - learning

Definição

Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, denote por s_n sua n-ésima soma parcial:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

n	Soma dos n primeiros termos
1	0,50000000
2	0,75000000
3	0,87500000
4	0,93750000
5	0,96875000
6	0,98437500
7	0,99218750
10	0,99902344
15	0,99996948
20	0,99999905
25	0,99999997

Se a sequência $\{s_n\}$ for convergente e $\boxed{\lim_{n\to\infty} s_n = s}$ existir como um número real, então a série $\sum a_n$ é chamada **convergente**, e escrevemos

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

O número s é chamado a **soma** da série. Se a sequência $\{s_n\}$ é divergente, então a série é chamada **divergente**.

$\mathbf{a_n \neq \mathit{Sn}}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

obtemos $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \ldots, 1 - 1/2^n, \ldots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

Assim, a soma de uma série é o limite da sequência de somas parciais

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Exemplo

Exemplo 1:

Suponhamos que se saiba que a soma dos primeiros n termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{2n}{3n+5}$$

Mas $\Sigma\, a_n$ é convergente???????

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \frac{2n}{3n+5} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{3 + \dfrac{5}{n}} = \frac{2}{3}$$

Comentários finais

Uma sequência é uma lista ordenada de números enquanto uma série é a soma de uma lista de números.

Uma série é convergente se a sequência das somas parciais for uma sequência convergente. A série é divergente se ela não for convergente.

Uma série pode ser finita ou infinita

A soma de infinitos termos pode ser um finito