Soluções da Prova P1 de Cálculo 3
Sequências, Séries e Representações em Séries de Potência

Professor: Jorge Formiga
Data: 08/04/2025

Questão 1

Dada a sequência:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{2}{6}, \quad a_3 = \frac{3}{12}, \quad a_4 = \frac{4}{20}, \quad a_5 = \frac{5}{30}$$

(a) O denominador segue: $2 = 1 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$, $12 = 3 \cdot 4$, etc. Assim,

$$a_n = \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

(b) Como $a_n = \frac{1}{n+1}$, então:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Logo, a sequência converge para 0.

Questão 2

Dada a série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{10^n}$$

(a) Como $2^n < 5^n$ para $n \geq 1$, o termo geral é dominado por $\frac{5^n}{10^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Como $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ define uma série geométrica convergente, a série original também converge por comparação.

(b) Soma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{10}\right)^n + \left(\frac{5}{10}\right)^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{5}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1/5}{4/5} + \frac{1/2}{1/2} = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

Questão 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

(a) Somando os cinco primeiros termos:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 6} + \frac{1}{5\cdot 7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35}$$
$$\approx 0.333 + 0.125 + 0.067 + 0.042 + 0.028 \approx 0.595$$

(b) Usando frações parciais:

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} \Rightarrow A(n+2) + Bn = 1$$

Para determinar A e B:

$$\begin{aligned} A(n+2) + Bn &= 1 \\ A + B &= 0 \\ 2A = 1 &\Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow \frac{1}{n(n+2)} &= \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)} \end{aligned}$$

(c) Série telescópica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)} \right)$$

Cancelamentos sucessivos levam ao resultado:

$$\lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2(N+1)} - \frac{1}{2(N+2)} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{11}{12} \approx 0.9166$$

Questão 4

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$$

(a) Aplicando o Teste da Integral:
Definimos a função:

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^3} \quad \text{para } x > 1$$

A função $f(x)$ é positiva, contínua e decrescente para $x > e$, portanto podemos aplicar o teste:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3}\, dx$$

Substituindo $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$:

$$\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{u^3}\, du = \left[\frac{-1}{2u^2} \right]_{\ln 2}^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{2(\ln 2)^2} \right) = \frac{1}{2(\ln 2)^2}$$

Como a integral converge, concluímos que a série também converge.
(b) Assim, pela aplicação do teste da integral:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3} \quad \text{é convergente.}$$

Questão 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^5+4n}$$

(a) Para n grande:

$$\frac{n^2+3}{n^5+4n} \sim \frac{n^2}{n^5} = \frac{1}{n^3} \Rightarrow \text{Comparável com uma p-série com } p = 3 > 1 \Rightarrow \text{Convergente}$$

(b) Teste da razão:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+3}{(n+1)^5+4(n+1)} \cdot \frac{n^5+4n}{n^2+3} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^5} \cdot \frac{n^5}{n^2} = 1 \end{aligned}$$

Ineficaz, pois o limite é 1.

Questão 6

$$f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

(a) Maclaurin até x^4:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

(b) Para $x = 0.8$:

$$\begin{aligned} \ln(1.8) &\approx 0.8 - \frac{0.8^2}{2} + \frac{0.8^3}{3} - \frac{0.8^4}{4} \\ &= 0.8 - 0.32 + 0.1707 - 0.1024 \approx 0.548 \end{aligned}$$

Questão 7

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^3}dt$$

(a) Expansão de $\frac{1}{1+t^3}$:

$$\frac{1}{1+t^3} = 1 - t^3 + t^6 - t^9 + \cdots \Rightarrow \text{até } t^6 : 1 - t^3 + t^6$$

(b) Integração termo a termo:

$$f(x) = \int_0^x (1 - t^3 + t^6)dt = x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7}$$