Cálculo Diferencial e Integral III
Resolução Comentada da Prova P2

Questão 1

A eficiência de remoção de matéria orgânica é dada por uma função de duas variáveis

$$E = E(T, p),$$

onde T representa a temperatura da água e p representa o pH.
O ponto de linearização é

$$(T_0, p_0) = (25, 7).$$

Observando a tabela, verificamos que

$$E(25, 7) = 90.$$

Para construir a aproximação linear precisamos determinar as derivadas parciais de E em relação à temperatura e ao pH.

Cálculo de $E_T(25, 7)$

Utilizando a aproximação por diferenças centrais,

$$E_T(25, 7) \approx \frac{E(26, 7) - E(24, 7)}{26 - 24}.$$

Da tabela,

$$E(26, 7) = 92$$

e

$$E(24, 7) = 88.$$

Logo,

$$E_T(25, 7) = \frac{92 - 88}{2} = 2.$$

Isso significa que, próximo ao ponto considerado, um aumento de $1°C$ provoca aproximadamente um aumento de 2% na eficiência de remoção.

Cálculo de $E_p(25, 7)$

Agora utilizamos novamente diferenças centrais:

$$E_p(25, 7) \approx \frac{E(25, 7.5) - E(25, 6.5)}{7.5 - 6.5}.$$

Da tabela,

$$E(25, 7.5) = 93$$

e

$$E(25, 6.5) = 87.$$

Assim,

$$E_p(25, 7) = \frac{93 - 87}{1} = 6.$$

Portanto, próximo do ponto considerado, um aumento de uma unidade de pH aumenta a eficiência em aproximadamente 6%.

Construção da aproximação linear

A fórmula da aproximação linear para uma função de duas variáveis é

$$L(T, p) = E(T_0, p_0) + E_T(T_0, p_0)(T - T_0) + E_p(T_0, p_0)(p - p_0).$$

Substituindo os valores encontrados:

$$L(T, p) = 90 + 2(T - 25) + 6(p - 7).$$

Portanto,

$$\boxed{L(T, p) = 90 + 2(T - 25) + 6(p - 7)}$$

Estimativa solicitada

Substituindo

$$T = 25.4$$

e

$$p = 7.2,$$

temos

$$L(25.4, 7.2) = 90 + 2(0.4) + 6(0.2).$$

Efetuando os cálculos,

$$L(25.4, 7.2) = 90 + 0.8 + 1.2 = 92.$$

Portanto,

$$\boxed{E(25.4, 7.2) \approx 92\%}$$

Questão 2(a)

Considere a função

$$f(x, y) = x(x + y)^2.$$

Deseja-se calcular

$$f_x(0, 2).$$

Como a função é um produto entre x e $(x + y)^2$, devemos utilizar a regra do produto. Derivando em relação a x,

$$f_x = 1 \cdot (x + y)^2 + x \cdot 2(x + y).$$

Logo,

$$f_x = (x + y)^2 + 2x(x + y).$$

Colocando o fator $(x + y)$ em evidência,

$$f_x = (x + y)(3x + y).$$

Agora substituímos o ponto solicitado:

$$f_x(0, 2) = (2)(2) = 4.$$

Portanto,

$$\boxed{f_x(0, 2) = 4}$$

Questão 2(b)

Considere a equação

$$x^2 - y^2 - z^2 - 2z = 4.$$

Observe que z é uma função implícita de x e y. Portanto, para determinar

$$\frac{\partial z}{\partial x},$$

devemos derivar implicitamente toda a equação em relação a x.
Temos

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial x}(y^2) - \frac{\partial}{\partial x}(z^2) - \frac{\partial}{\partial x}(2z) = 0.$$

Aplicando as regras de derivação,

$$2x - 0 - 2z\frac{\partial z}{\partial x} - 2\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Agrupando os termos que contêm

$$\frac{\partial z}{\partial x},$$

obtemos

$$2x = (2z + 2)\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Finalmente,

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z+1}}$$

Questão 2(c)

Considere

$$P = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2},$$

onde

$$u = xe^y, \qquad v = ye^x, \qquad w = e^{xy}.$$

Deseja-se calcular

$$\frac{\partial P}{\partial x}$$

no ponto

$$(x, y) = (0, 2).$$

Observe que P depende das variáveis u, v e w, que por sua vez dependem de x e y. Portanto, devemos utilizar a regra da cadeia.
Inicialmente escrevemos

$$P = (u^2 + v^2 + w^2)^{1/2}.$$

Derivando em relação a x,

$$P_x = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)^{-1/2} \left(2uu_x + 2vv_x + 2ww_x\right).$$

Simplificando,

$$P_x = \frac{uu_x + vv_x + ww_x}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}.$$

Vamos agora calcular os valores necessários no ponto $(0, 2)$.
Para u,

$$u = xe^y,$$

portanto,

$$u(0, 2) = 0 \cdot e^2 = 0.$$

Derivando em relação a x,

$$u_x = e^y.$$

Assim,

$$u_x(0, 2) = e^2.$$

Para v,

$$v = ye^x.$$

Logo,

$$v(0, 2) = 2e^0 = 2.$$

Derivando,

$$v_x = ye^x.$$

Portanto,

$$v_x(0, 2) = 2.$$

Para w,

$$w = e^{xy}.$$

Logo,

$$w(0, 2) = e^0 = 1.$$

Derivando em relação a x,

$$w_x = ye^{xy}.$$

Assim,

$$w_x(0,2) = 2.$$

Substituindo todos os valores no numerador,

$$uu_x + vv_x + ww_x = 0(e^2) + 2(2) + 1(2) = 6.$$

O denominador é

$$\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

Logo,

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial x}(0,2) = \frac{6}{\sqrt{5}}}$$

Questão 3

O volume de um reservatório cilíndrico é dado por

$$V = \pi r^2 h.$$

No instante considerado,

$$r = 2m, \qquad h = 5m.$$

Além disso,

$$\frac{dr}{dt} = 1\ cm/min = 0,01\ m/min,$$

e

$$\frac{dh}{dt} = 3\ cm/min = 0,03\ m/min.$$

Como tanto o raio quanto a altura variam com o tempo, devemos derivar a expressão do volume em relação ao tempo.

Aplicando a regra do produto,

$$\frac{dV}{dt} = \pi \frac{d}{dt}(r^2 h).$$

Logo,

$$\frac{dV}{dt} = \pi \left(2rh\frac{dr}{dt} + r^2 \frac{dh}{dt} \right).$$

Substituindo os valores fornecidos,

$$\frac{dV}{dt} = \pi \left[2(2)(5)(0,01) + (2)^2(0,03) \right].$$

Calculando cada parcela,

$$2(2)(5)(0,01) = 0,20,$$

e

$$(2)^2(0,03) = 0,12.$$

Portanto,

$$\frac{dV}{dt} = \pi(0,20 + 0,12).$$

Assim,

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = 0,32\pi \ m^3/min}$$

ou aproximadamente,

$$\boxed{\frac{dV}{dt} \approx 1,005 \ m^3/min.}$$

Isso significa que, naquele instante, o volume do reservatório está aumentando a uma taxa de aproximadamente $1,005\, m^3$ por minuto.

Questão 4

Considere a função

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2.$$

Deseja-se determinar as curvas de nível para

$$c = 1, \qquad c = 4, \qquad c = 9,$$

e identificar a superfície associada.
As curvas de nível são obtidas impondo

$$f(x, y) = c.$$

Portanto,

$$x^2 + 2y^2 = c.$$

Curva de nível para $c = 1$

Substituindo $c = 1$,

$$x^2 + 2y^2 = 1.$$

Esta equação representa uma elipse centrada na origem.

Curva de nível para $c = 4$

Substituindo $c = 4$,

$$x^2 + 2y^2 = 4.$$

Obtém-se outra elipse centrada na origem, porém maior que a anterior.

Curva de nível para $c = 9$

Substituindo $c = 9$,

$$x^2 + 2y^2 = 9.$$

Novamente temos uma elipse centrada na origem, agora com dimensões ainda maiores.

Portanto, as curvas de nível são uma família de elipses concêntricas. A Figura 1 apresenta as curvas de nível obtidas.

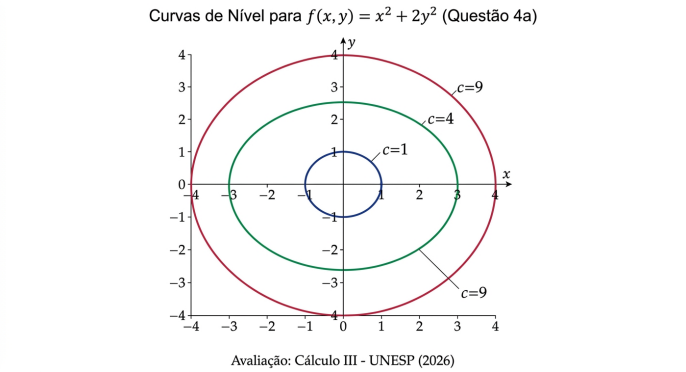


Figura 1: Curvas de nível da função $f(x, y) = x^2 + 2y^2$.

Para identificar a superfície associada, escrevemos

$$z = x^2 + 2y^2.$$

Como os coeficientes dos termos quadráticos são positivos, a superfície possui vértice na origem e abre para cima.

A Figura 2 apresenta o gráfico tridimensional da função.

com eixo principal coincidente com o eixo z.

As curvas de nível observadas anteriormente correspondem às interseções desse paraboloide com planos horizontais $z = c$.

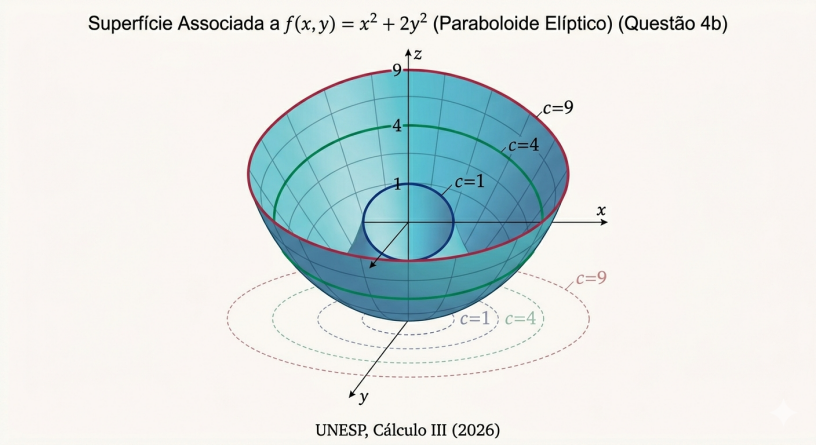


Figura 2: Superfície $z = x^2 + 2y^2$.